▶ **Jetez un œil sur les consignes de rédaction, en bas de page 2 !**

Problème 1

▶ Soient $\mathbb{K}$ un corps et $n \geqslant 2$. Soient i et j deux éléments de $[\![1,n]\!]$. Notons $\Omega_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre n définie par $(\Omega_{i,j})_{\ell,k} = \delta_{i,\ell}\delta_{j,k}$ pour tous ℓ et k appartenant à $[\![1,n]\!]$. Nous savons que les n^2 matrices ainsi définies forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Autre rappel : la trace de $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le scalaire $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} P_{i,i}$.

▶ La matrice identité d'ordre n est notée $\mathbf{I}_n$. En particulier, $\mathbf{I}_n = \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Omega_{i,i}$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Énoncez et prouvez la formule donnant la valeur de $\Omega_{i,j}\Omega_{p,q}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Donnez une expression *très simple* de la trace de $\Omega_{i,j}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Soient P et Q deux matrices carrées d'ordre n. Établissez la relation $\operatorname{tr}(PQ) = \operatorname{tr}(QP)$.

▶ Dans toute la suite, S est une matrice carrée d'ordre n fixée, distincte de $\mathbf{I}_n$ et $-\mathbf{I}_n$, et vérifiant $S^2 = \mathbf{I}_n$. Notons $\Phi :\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto SAS - A$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrez que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Calculez la trace de $\Phi(A)$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Φ est-il surjectif ?

$\boxed{\text{Q7}}$ Exhibez deux éléments de $\ker(\Phi)$ linéairement indépendants.

$\boxed{\text{Q8}}$ Φ est-il injectif ?

$\boxed{\text{Q9}}$ Notons $\Phi^2 = \Phi \circ \Phi$. Calculez $(\Phi^2)(A)$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Quelle relation simple existe-t-il entre Φ^2 et Φ ?

$\boxed{\text{Q11}}$ Un projecteur est caché dans l'énoncé. Trouvez-le !

▶ Dans la suite, nous fixons $n = 2$ et $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; nous avons bien $S^2 = \mathbf{I}_2$. La base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est énumérée comme suit : $\mathcal{B} = (\Omega_{1,1}; \Omega_{1,2}; \Omega_{2,1}; \Omega_{2,2})$. Notons M la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Sans aucun calcul, que pouvez-vous dire du rang de M ?

$\boxed{\text{Q13}}$ Quelle information le résultat de la question 6 apporte-t-il sur le rang de M ?

$\boxed{\text{Q14}}$ Quelle information le résultat de la question 7 apporte-t-il sur le rang de M ?

$\boxed{\text{Q15}}$ Explicitez M.

$\boxed{\text{Q16}}$ Déterminez le rang de Φ.

$\boxed{\text{Q17}}$ Montrez *sans aucun calcul* que M est solution d'une équation algébrique très simple.

Tournez S.V.P.

Problème 2

- Notons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$, $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(3x)$, $h : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$ et $k : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(3x)$ et $\mathbf{E} = \left\{af + bg + ch + dk \;\middle|\; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\right\}$.
- Pour faciliter la rédaction, vous pourrez noter $\varphi_{a,b,c,d}$ la fonction $af + bg + ch + dk$.

Q1 $\mathcal{B} = (f, g, h, k)$ est-elle une famille libre du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$?

Q2 Montrez que $\mathbf{E}$ est un s.e.v. de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Q3 La famille $\mathcal{B}$ est-elle une base de $\mathbf{E}$?

Q4 La fonction $p : x \mapsto \sin^3(x) - \cos^3(x)$ appartient-elle à $\mathbf{E}$?

Q5 La fonction $q : x \mapsto 1$ appartient-elle à $\mathbf{E}$?

Q6 La fonction $q : x \mapsto x$ appartient-elle à $\mathbf{E}$?

Q7 La fonction $\mathcal{D} : \varphi \mapsto \varphi'$ est-elle un endomorphisme de $\mathbf{E}$?

Q8 Quelle est la matrice M de $\mathcal{D}$ dans la base $\mathcal{B}$?

Q9 Pour $n \in \mathbb{N}$, explicitez M^n ; vous distinguerez deux cas de figure, selon la parité de n.

Q10 La fonction $\mathcal{D}$ est-elle un automorphisme de $\mathbf{E}$?

Q11 Explicitez la matrice inverse M^{-1} de M.

Obligatoires : numérotation des copies de $1/n$ à n/n ; votre nom sur chaque copie ; numérotation des questions ; résolution dans l'ordre de l'énoncé ; au moins une ligne sautée entre deux questions consécutives.
Interdits : encre rouge, crayon, tippex, saleté excessive.
Recommandés : preuves rigoureuses et concises ; présentation soignée ; orthographe tolérable.