► **Jetez un œil sur les consignes de rédaction, en bas de page 2 !**

Problème 1

► Soient $\mathbb{K}$ un corps et $n \geqslant 2$. Soient i et j deux éléments de $[\![1,n]\!]$. Notons $\Omega_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre n définie par $(\Omega_{i,j})_{\ell,k} = \delta_{i,\ell}\delta_{j,k}$ pour tous ℓ et k appartenant à $[\![1,n]\!]$. Nous savons que les n^2 matrices ainsi définies forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Autre rappel : la trace de $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le scalaire $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} P_{i,i}$.

► La matrice identité d'ordre n est notée $\mathbf{I}_n$. En particulier, $\mathbf{I}_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \Omega_{i,i}$.

Q1 Énoncez et prouvez la formule donnant la valeur de $\Omega_{i,j}\Omega_{p,q}$.

Q2 Donnez une expression *très simple* de la trace de $\Omega_{i,j}$.

Q3 Soient P et Q deux matrices carrées d'ordre n. Établissez la relation $\mathrm{tr}(PQ) = \mathrm{tr}(QP)$.

► Dans toute la suite, S est une matrice carrée d'ordre n fixée, distincte de $\mathbf{I}_n$ et $-\mathbf{I}_n$, et vérifiant $S^2 = \mathbf{I}_n$. Notons $\Phi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto SAS - A$.

Q4 Montrez que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q5 Calculez la trace de $\Phi(A)$.

Q6 Φ est-il surjectif ?

Q7 Exhibez deux éléments de $\ker(\Phi)$ linéairement indépendants.

Q8 Φ est-il injectif ?

Q9 Notons $\Phi^2 = \Phi \circ \Phi$. Calculez $(\Phi^2)(A)$.

Q10 Quelle relation simple existe-t-il entre Φ^2 et Φ ?

Q11 Un projecteur est caché dans l'énoncé. Trouvez-le !

► Dans la suite, nous fixons $n = 2$ et $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; nous avons bien $S^2 = \mathbf{I}_2$. La base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est énumérée comme suit : $\mathcal{B} = (\Omega_{1,1}; \Omega_{1,2}; \Omega_{2,1}; \Omega_{2,2})$. Notons M la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$.

Q12 Sans aucun calcul, que pouvez-vous dire du rang de M ?

Q13 Quelle information le résultat de la question 6 apporte-t-il sur le rang de M ?

Q14 Quelle information le résultat de la question 7 apporte-t-il sur le rang de M ?

Q15 Explicitez M.

Q16 Déterminez le rang de Φ.

Q17 Montrez *sans aucun calcul* que M est solution d'une équation algébrique très simple.

Tournez S.V.P.

Problème 2

- Notons $f\ :\ x\in\mathbb{R}\mapsto\sin(x)$, $g\ :\ x\in\mathbb{R}\mapsto\sin(3x)$, $h\ :\ x\in\mathbb{R}\mapsto\cos(x)$ et $k\ :\ x\in\mathbb{R}\mapsto\cos(3x)$ et $\mathbf{E}=\left\{af+bg+ch+dk\ \middle|\ (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\right\}$.
- Pour faciliter la rédaction, vous pourrez noter $\varphi_{a,b,c,d}$ la fonction $af+bg+ch+dk$.

$\boxed{\text{Q1}}$ $\mathcal{B}=(f,g,h,k)$ est-elle une famille libre du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$?

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que $\mathbf{E}$ est un s.e.v. de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Q3}}$ La famille $\mathcal{B}$ est-elle une base de $\mathbf{E}$?

$\boxed{\text{Q4}}$ La fonction $p :\ x\mapsto\sin^3(x)-\cos^3(x)$ appartient-elle à $\mathbf{E}$?

$\boxed{\text{Q5}}$ La fonction $q :\ x\mapsto 1$ appartient-elle à $\mathbf{E}$?

$\boxed{\text{Q6}}$ La fonction $q :\ x\mapsto x$ appartient-elle à $\mathbf{E}$?

$\boxed{\text{Q7}}$ La fonction $\mathcal{D} :\ \varphi\mapsto\varphi'$ est-elle un endomorphisme de $\mathbf{E}$?

$\boxed{\text{Q8}}$ Quelle est la matrice M de $\mathcal{D}$ dans la base $\mathcal{B}$?

$\boxed{\text{Q9}}$ Pour $n\in\mathbb{N}$, explicitez M^n ; vous distinguerez deux cas de figure, selon la parité de n.

$\boxed{\text{Q10}}$ La fonction $\mathcal{D}$ est-elle un automorphisme de $\mathbf{E}$?

$\boxed{\text{Q11}}$ Explicitez la matrice inverse M^{-1} de M.

Obligatoires : numérotation des copies de $1/n$ à n/n ; votre nom sur chaque copie ; numérotation des questions ; résolution dans l'ordre de l'énoncé ; au moins une ligne sautée entre deux questions consécutives.
Interdits : encre rouge, crayon, tippex, saleté excessive.
Recommandés : preuves rigoureuses et concises ; présentation soignée ; orthographe tolérable.