Sup PCSI2 — Contrôle 2009/07

Obligatoires : numérotation des copies de $1/n$ à n/n ; votre nom sur chaque copie ; numérotation des questions ; résolution dans l'ordre de l'énoncé ; au moins une ligne sautée entre deux questions consécutives.
Interdits : encre rouge, crayon, tippex, saleté excessive.
Recommandés : preuves rigoureuses et concises ; présentation soignée ; orthographe tolérable.

Problème d'analyse

Partie 1

Q1 Donnez une expression *simple* de $\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (2k-1)$.

► Notons $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$.

Q2 Justifiez avec précision l'appartenance de f à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Q3 Explicitez $f'(t)$ et $f''(t)$. Les calculs devront figurer sur votre copie.

► Vous pourrez identifier $P \in \mathbb{R}[X]$ et la fonction polynôme qui lui est associée. Tous les polynômes seront écrits selon les puissances décroissantes.

Q4 Montrez que $f^{(n)}(t) = \dfrac{P_n(t)}{(t^2+1)^{n+\frac{1}{2}}}$ où P_n est un polynôme dont vous préciserez (en fonction de n) le degré, la parité, et le coefficient dominant α_n.

Q5 La question précédente a mis en évidence une relation exprimant P_{n+1} en fonction de P_n et P'_n ; utilisez cette relation *à l'exclusion de toute autre* pour déterminer P_1, P_2, P_3 et P_4. Les calculs devront figurer sur votre copie.

Q6 Donnez une expression *simple* de $P_n(i)$.

Partie 2

Q7 Énoncez la *formule de* Leibniz pour la dérivée n-ième du produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. On ne demande pas la démonstration.

Q8 Montrez que f est solution d'une équation différentielle *très simple*.

Q9 En déduire une relation entre P_n, P_{n+1} et P_{n+2}.

Q10 Donnez une expression *simple* de $P_{2n}(0)$.

Q11 Justifiez l'affirmation suivante : $P_n(1)$ ne peut être nul.

Q12 Exprimez P'_{n+1} en fonction de P_n.

Q13 Montrez que P_n est solution d'une équation différentielle du deuxième ordre.

► Dans les trois questions suivantes, n est un naturel fixé.

Q14 Justifiez l'affirmation suivante : « on peut écrire $P_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} a_k X^{n-2k}$ ».

Q15 Établissez une relation entre a_k et a_{k+1}.

Q16 En déduire une expression de a_k débarrassée de tout symbole $\prod$.

Partie 3

$\boxed{\text{Q17}}$ Démontrez le *théorème de Rolle généralisé* : si f, continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$, dérivable dans l'intervalle $]a, +\infty[$, possède en $+\infty$ une limite égale à $f(a)$, alors il existe $c > a$ tel que $f'(c) = 0$.

$\boxed{\text{Q18}}$ En utilisant ce théorème, prouvez que P_n possède exactement n racines réelles, distinctes, qui de plus séparent les racines de P_{n+1}.

► Pour $n \geqslant 2$, nous notons ξ_n la plus petite racine strictement positive de P_n.

$\boxed{\text{Q19}}$ Explicitez ξ_2, ξ_3 et ξ_4. Les calculs devront figurer sur votre copie.

$\boxed{\text{Q20}}$ Justifiez : ξ_{2n+1} majore strictement ξ_{2n} et ξ_{2n+2}.

$\boxed{\text{Q21}}$ Comparez ξ_{4n} et ξ_{4n+2}, puis ξ_{4n+2} et ξ_{4n+4}.

Exercice d'algèbre linéaire

► L'exercice se passe dans un $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbf{E}$. Le composé de deux endomorphismes f et g est noté fg au lieu de $f \circ g$; de même, f^2 désigne $f \circ f$.

► Soient p et q deux endomorphismes de E. Nous supposons que p et $p - pq$ sont des projecteurs.

$\boxed{\text{Q1}}$ Établissez l'égalité $pqpq = pqp$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que pqp est un projecteur.

$\boxed{\text{Q3}}$ Pour $n \geqslant 1$, prouvez l'égalité $(pq)^n p = pqp$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Exprimez $(p + pqp)^2$, puis $(p + pqp)^3$, comme combinaison linéaire de p et pqp.

$\boxed{\text{Q5}}$ Conjecturez puis démontrez une formule exprimant $(p + pqp)^n$ comme combinaison linéaire de p et pqp, pour $n \geqslant 1$. Remarque : il existe (au moins) deux démonstrations différentes ; si vous donnez les deux, vous serez gratifiés en conséquence !

$\boxed{\text{Q6}}$ Dans cette question, nous fixons $\mathbf{E} = \mathbb{R}^3$. Exhibez p et q tels que p et $p - pq$ soient des projecteurs distincts et tous deux non triviaux (les projecteurs triviaux sont l'identité et l'endomorphisme nul).