$\boxed{\text{Sup PCSI2 — Contrôle 2009/06}}$

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Ni crayon ni encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Problème 1 : étude d'une fonction définie par une intégrale

- Notons $\mathcal{E} = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Dans tout cet exercice, f désigne un élément de $\mathcal{E}$. Vous noterez F la primitive de f qui s'annule en 0.

$\boxed{\text{Q1}}$ Justifiez l'existence de la fonction $G : \; x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(xt)\,dt$.

- Chacune des trois questions suivantes étudie un cas particulier.

$\boxed{\text{Q2}}$ Dans cette question, nous supposons que $f(t) = \sin(2t)$. Explicitez $G(x)$; la fonction G est-elle continue en 0 ?

$\boxed{\text{Q3}}$ Dans cette question, nous supposons que $f(t) = \exp(-t)$. Explicitez $G(x)$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Dans cette question, nous supposons que f est bornée. La fonction G est-elle bornée ?

- Nous revenons au cas général.

$\boxed{\text{Q5}}$ Montrez que G est continue en 0.

$\boxed{\text{Q6}}$ Soit $x \neq 0$. Montrez que G est continue en x.

$\boxed{\text{Q7}}$ Soit $x \neq 0$. Montrez que G est dérivable en x ; vous exprimerez $G'(x)$ en fonction de x, $f(x)$ et $F(x)$.

$\boxed{\text{Q8}}$ $\star\star$ Montrez que G n'est pas nécessairement dérivable en 0.

$\boxed{\text{Q9}}$ Dans cette question, nous supposons que f est k-lipschitzienne. Montrez que G est elle aussi lipschitzienne.

- Notons Φ la fonction qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe $\Phi(f) = G$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Montrez que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Φ est-il surjectif ?

$\boxed{\text{Q12}}$ Φ est-il injectif ?

$\boxed{\text{Q13}}$ Dans cette question, nous supposons que f est une fonction polynôme de degré n. Montrez que G est elle aussi une fonction polynôme de degré n.

Tournez S.V.P.

Problème 2 : quelques questions d'algèbre linéaire

- Les questions suivantes sont indépendantes l'une de l'autre. Elles portent toutes sur des endomorphismes ou des sous-espaces de $\mathbb{K}^n$, où $n \geqslant 2$.
- L'endomorphisme identité de $\mathbb{K}^n$ est noté id ; l'endomorphisme nul de $\mathbb{K}^n$ est noté $\mathbf{0}$.
- f, g, h sont des endomorphismes de $\mathbb{K}^n$; A, B et C sont des s.e.v. de $\mathbb{K}^n$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Si $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$ sont supplémentaires l'un de l'autre, alors f est un projecteur.

$\boxed{\text{Q2}}$ Si $\dim\big(\ker(f)\big) + \dim\big(\operatorname{im}(f)\big) = n$, alors f est un projecteur.

$\boxed{\text{Q3}}$ Le rang de $f \circ g$ est égal à la somme des rangs de f et g.

$\boxed{\text{Q4}}$ Le rang de $f + g$ est égal à la somme des rangs de f et g.

$\boxed{\text{Q5}}$ Si $\operatorname{im}(f) \subset \ker(f)$, alors $f \circ f = \mathbf{0}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ $\dim(A + B) \leqslant \dim(A) + \dim(B)$.

$\boxed{\text{Q7}}$ $\dim\big(f(A)\big) = \dim(A)$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Si $\dim(A) + \dim(B) > n$, alors $\dim(A \cap B) > 0$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Si $f \circ g$ est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$, alors $g^{-1} \circ f$ est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Si $f + g = \mathrm{id}$, alors l'un au moins des deux endomorphismes f et g est bijectif.

$\boxed{\text{Q11}}$ Si $f + g = \mathrm{id}$, alors $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \geqslant n$.

$\boxed{\text{Q12}}$ $\operatorname{im}(f + g) = \operatorname{im}(f) + \operatorname{im}(g)$.

$\boxed{\text{Q13}}$ Si $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \geqslant n$, alors $\mathbb{K}^n = \operatorname{im}(f) + \operatorname{im}(g)$.

$\boxed{\text{Q14}}$ Si $\mathbb{K}^n = \operatorname{im}(f) + \operatorname{im}(g)$, alors $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \geqslant n$.