Sup PCSI2 — Contrôle 2009/05

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Ni crayon ni encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Problème 1

Les réponses qui ne sont pas rigoureusement justifiées ne seront pas prises en compte dans la notation.

▶ Notons $f : x \mapsto \ln\big(x + \sqrt{1+x^2}\big)$.

Q1 Explicitez l'ensemble de définition $\mathcal{J}$ de f.

Q2 Quelle est la parité de f ?

Q3 Montrez que f est continue sur $\mathcal{J}$.

Q4 Montrez que f est dérivable sur $\mathcal{J}$.

Q5 Explicitez $f'(x)$, pour $x \in \mathcal{J}$.

Q6 Montrez que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{J}$.

Q7 Déterminez des réels a et b tels que $f(x) = \ln(ax) + bx^{-2} + o(x^{-2})$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q8 Donnez l'allure de la courbe représentative de f.

▶ Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}\,dx$.

Q9 Calculez u_0.

Q10 Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Q11 Montrez que cette suite converge.

Q12 Avec une majoration très simple de u_n, déterminez la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q13 Justifiez l'inégalité $u_n \geqslant \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}}$.

Q14 Écrivez une relation *très simple* entre u_n, u_{n+2} et I_n.

Q15 Au moyen d'une intégration par parties *soigneusement justifiée*, exprimez I_n en fonction de u_{n+2}. Vous noterez que je considérerai comme une offense grave l'absence, sur votre copie, du $\boxed{\mathbf{s}}$ final dans l'expression *intégration par parties*.

Q16 En déduire une relation entre u_n et u_{n+2}.

Q17 Utilisez cette relation pour établir la majoration $(2n+3)u_{n+2} \leqslant \sqrt{2}$.

Q18 En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers l'infini.

Tournez S.V.P.

Problème 2

▶ Notons $\varphi:\ t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{t^4}{e^t + t^2}$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Justifiez l'existence de la fonction $f:\ x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t)\,dt$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Discutez le signe de $f(x)$ en fonction de x.

$\boxed{\text{Q3}}$ Prouvez que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Explicitez $f'(x)$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Déterminez le $DL_6(0)$ de f.

Problème 3

▶ Notons Γ la courbe représentative de la fonction ln. Pour $n \geqslant 1$, notons $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction $x > 0 \mapsto n - x$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que Γ et $\mathcal{C}_n$ possèdent un et un seul point d'intersection ; vous noterez x_n l'abscisse de ce point. Ainsi, x_n est l'unique solution de l'équation $\ln(x) = n - x$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.

$\boxed{\text{Q3}}$ Quel est le comportement de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$: convergence ou divergence ?

$\boxed{\text{Q4}}$ Donnez un équivalent *très simple* de x_n lorsque n tend vers l'infini.

$\boxed{\text{Q5}}$ Notons $y_n = n - x_n$. Donnez un équivalent *très simple* de y_n lorsque n tend vers l'infini.

$\boxed{\text{Q6}}$ Sauriez-vous donner un développement asymptotique à trois termes de x_n, lorsque n tend vers l'infini ?