Sup PCSI2 — Contrôle 2009/04

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Ni crayon ni encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

## Exercice 1 : QCM sur les suites de réels

► Pour chacune des affirmations suivantes, dites si elle est vraie (preuve à l'appui) ou fausse (en exhibant un contre-exemple).

Q1 Si la suite $(u_n)$ converge et si la suite $(x_n)$ est bornée, alors la suite de terme général $u_n x_n$ converge.

Q2 Si la suite $(u_n)$ est bornée et à termes strictement positifs, alors la suite de terme général $\ln(u_n)$ est bornée.

Q3 La suite de terme général $\dfrac{u_n}{1+|u_n|}$ est bornée.

Q4 Si la suite $(x_n)$ converge vers 0 et si $u_n \leqslant \dfrac{x_n}{2}$ à partir d'un certain rang, alors la suite $(u_n)$ converge également vers 0.

Q5 Si la suite de terme général $u_n$ diverge, alors la suite de terme général $(u_n)^2$ diverge également.

Q6 Si la suite de terme général $\cos(u_n)$ converge, alors la suite de terme général $u_n$ converge également.

Q7 Si la suite de terme général $u_n$ converge vers $\ell$, alors la suite de terme général $u_{2n}$ converge vers $2\ell$.

Q8 Si la suite de terme général $u_n$ converge vers $\ell$, alors la suite de terme général $(u_n)^2$ converge vers $\ell^2$.

Q9 Si la suite de terme général $u_n$ diverge, alors la suite de terme général $\cos(n!u_n)$ diverge également.

## Exercice 2 (d'après HEC 2000, voie scientifique, Maths II)

► Nous nous intéressons à la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par la donnée de son premier terme $u_1 = 0$ et la relation de récurrence $u_n = n - 1 + \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{1\leqslant k<n} u_k$ pour $n \geqslant 1$. Cette suite intervient dans l'analyse de l'algorithme de tri rapide (*quicksort*) de Tony Hoare.

Q1 Calculez $u_2$, $u_3$ et $u_4$. Vous donnerez les résultats sous forme de fractions irréductibles, et vous ferez apparaître les calculs sur votre copie.

Q2 Prouvez que $nu_n - (n+1)u_{n-1} = 2n - 2$ pour $n \geqslant 3$.

► Notons $v_n = \dfrac{u_n}{n+1}$ pour $n \geqslant 1$.

Q3 Pour $n \geqslant 3$, exprimez $v_n - v_{n-1}$ en fonction de $n$.

Q4 Déterminez deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que l'égalité $\dfrac{2x-2}{x(x+1)} = \dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{\beta}{x+1}$ soit valable pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$.

► Notons $h_n = \displaystyle\sum_{2\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k}$ et $z_n = \dfrac{1}{n} - \ln\Big(\dfrac{n}{n-1}\Big)$ pour $n \geqslant 2$.

Q5 Pour $n \geqslant 2$, établissez $v_n = 2h_n - 2 + \dfrac{4}{n+1}$.

Q6 Exprimez $u_n$ en fonction de $h_n$ et $n$.

Q7 Prouvez l'égalité $h_n = \displaystyle\sum_{2\leqslant k\leqslant n} z_k + \ln(n)$.

► Notons $H_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k}$ et $\gamma$ la constante d'Euler. Nous admettrons que $H_n = \ln(n) + \gamma + \dfrac{1}{2n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$.

Q8 Donnez un développement asymptotique de $u_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

**Tournez S.V.P.**

## Exercice 3 (oral ENSTIM 2003, MPSI)

$\boxed{\text{Q1}}$ Rappelez la définition de la fonction arcsin.

► Notons $f : x \mapsto \arcsin\big(\exp(-x^2)\big)$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Quel est l'ensemble de définition de $f$ ?

$\boxed{\text{Q3}}$ Sur quel(s) intervalle(s) étudierez-vous $f$ ?

$\boxed{\text{Q4}}$ Quelle est la limite de $f$ en $+\infty$ ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Quel est le signe de $f(x)$ ?

$\boxed{\text{Q6}}$ Sans expliciter $f'(x)$, déterminez le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}_+$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Montrez que $f$ est dérivable sauf peut-être en 0.

$\boxed{\text{Q8}}$ Explicitez $f'(x)$ pour $x \neq 0$

$\boxed{\text{Q9}}$ $f$ est-elle dérivable à droite de 0 ? Si oui, quelle est la valeur de $f'_d(0)$ ?

$\boxed{\text{Q10}}$ $f$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$ entier ?

$\boxed{\text{Q11}}$ Donnez l'allure de la courbe représentative de $f$.