Sup PCSI2 — Contrôle 2009/03

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Ni crayon ni encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1

► Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Q1 Calculez S_n pour $n \in [\![0,5]\!]$. Vous présenterez les résultats (sous forme de fractions irréductibles) dans un tableau. Vous ne ferez pas apparaître les calculs intermédiaires sur votre copie.

Q2 Montrez que les suites de termes généraux respectifs $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$ sont adjacentes. Notons ℓ leur limite commune.

► Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^t \, dt$.

► Rappel : la valeur en 0 de la fonction $t \in [0,1] \mapsto t^0$ est égale à 1, par convention ; ainsi, cette fonction (constante) est continue (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$).

Q3 Montrez *rapidement* que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Q4 Explicitez la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Q5 Calculez I_0.

Q6 Calculez I_1 au moyen d'une intégration par parties *soigneusement justifiée*.

Q7 Établissez une relation liant I_n et I_{n+1}, au moyen d'une intégration par parties *soigneusement justifiée*.

Q8 Exprimez alors I_n en fonction de S_n.

Q9 En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 2

► Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x^5 + nx - 1$.

Q1 Prouvez que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution réelle, que nous noterons x_n.

► Nous nous intéressons désormais à la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Q2 Donnez un encadrement très simple de x_n.

Q3 Quel est le sens de variation de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Q4 Montrez que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ; que pouvez-vous dire, pour l'instant, de sa limite ℓ ?

Q5 Calculez $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$; quelle est la valeur de ℓ ?

Q6 Proposez une autre méthode pour déterminer ℓ.

Q7 Donnez un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers l'infini.

Q8 Justifiez la relation $x_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^6} + o\left(\dfrac{1}{n^6}\right)$ lorsque n tend vers l'infini.

Q9 Si possible, donnez un développement asymptotique de x_n à trois termes.

Tournez S.V.P.

Exercice 3

► (u_n) et (v_n) sont des suites de réels. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, preuve(s) à l'appui !

$\boxed{\text{Q1}}$ Si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, et si (u_n) est croissante, alors (v_n) est croissante APCR.

$\boxed{\text{Q2}}$ Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n \leqslant v_n$ APCR.

$\boxed{\text{Q3}}$ Si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n$, alors $u_n + u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} 2n$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Si $u_n + u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} 2n$, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, alors $\lfloor \ln(u_n) \rfloor \underset{n\to\infty}{\sim} \ln\big(\lfloor u_n \rfloor\big)$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, alors $\lfloor \exp(u_n) \rfloor \underset{n\to\infty}{\sim} \exp\big(\lfloor u_n \rfloor\big)$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Si la suite de terme général $\arcsin(u_n)$ est strictement croissante, alors la suite de terme général $\arccos(u_n)$ est strictement décroissante.