Sup PCSI2 — Contrôle 2009/02

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Ni crayon ni encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1

Q1 Calculez $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{49}(t)\cos^3(t)\,dt$. Le résultat sera présenté sous forme d'une fraction irréductible.

Q2 Pour $x \in \mathbb{R}$, établissez la relation $2\arctan\Big(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\Big) = \arctan\Big(\dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\Big)$.

Q3 Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - (8+3i)z^2 + (21+25i)z - 28 - 68i = 0$ sachant qu'elle possède une solution imaginaire pure.

► Les deux questions suivantes sont liées.

Q4 Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$.

Q5 En déduire les tangentes des nombres $\pi/5$ et $2\pi/5$ que vous mettrez sous la forme $\sqrt{p + q\sqrt{n}}$ où n, p et q sont éléments de $\mathbb{Z}$, puis celle de $\pi/10$.

Exercice 2

► Notons $f : x \mapsto \arcsin\big(\sin(x)\big) + \arccos\big(\cos(x)\big)$.

Q1 Précisez l'ensemble de définition de f, puis sa parité et sa périodicité éventuelles.

Q2 Donnez une expression simple de $f(x)$ pour x appartenant à chacun des intervalles $\Big[-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\Big]$, $\Big[-\dfrac{\pi}{2}, 0\Big]$, $\Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$, $\Big[\dfrac{\pi}{2}, \pi\Big]$.

Q3 Tracez la courbe représentative de f

Q4 Calculez $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$.

Exercice 3

► Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,dx$.

Q1 Calculez I_0 et I_1.

Q2 Quel est le sens de variation de la suite $\big(I_n\big)$?

Q3 Prouvez que la suite $\big(I_n\big)$ converge ; pouvez-vous, actuellement, préciser sa limite ?

Q4 Donnez un expression *très simple* de $I_{n+2} + I_n$.

Q5 En déduire la limite de la suite $\big(I_n\big)$.

Q6 Explicitez I_{2p} sous forme d'une somme. Indication : utilisez la relation établie à la question 4 pour effectuer un télescopage.

Q7 Explicitez de même I_{2p+1} sous forme d'une somme.

Q8 Calculez $G_1 = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$, puis $G_2 = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.