Sup PCSI2 — Contrôle 2009/01

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Ni crayon ni encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 : VRAI ou FAUX ?

► Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est VRAIE (preuve à l'appui) ou FAUSSE (contre-exemple à l'appui).

Q1 Le nombre i est égal à sa partie imaginaire.

Q2 Si la somme et le produit de deux complexes u et v sont des réels, alors u et v sont des réels.

Q3 Les racines carrées du complexe i sont $\sqrt{i}$ et $-\sqrt{i}$.

Q4 Les racines cubiques de l'unité sont 1, $\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right)$ et $\exp\left(\frac{-i\pi}{3}\right)$.

Q5 Si $e^z = -1$, alors $z = i\pi$.

Q6 Si le complexe u est solution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, alors $\overline{u}$ est l'autre solution.

Q7 Pour $n \geqslant 1$, la somme des n racines n-ièmes de l'unité est nulle.

Exercice 2 : questions en vrac

► Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

Q1 L'équation $\sin(x) - \sin^3(x) = \frac{1}{2}$ possède-t-elle des solutions réelles ?

Q2 Rappel : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Q3 Résolvez l'équation $z^3 - (1+2i)z^2 + (-11+25i)z + 66 + 42i = 0$ sachant qu'elle possède une solution imaginaire pure.

Q4 Résolvez dans $[0, 2\pi]$ l'équation $\left|\sin(2x)\right| + \left|\cos(2x)\right| = 1$.

Q5 Rappelez la formule permettant de transformer $\cos(a) + \cos(b)$ en un produit. Utilisez cette formule pour résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation $\cos(x) + \cos(4x) + \cos(7x) = 0$.

Q6 $A_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (2k-1)$ est la somme des n premiers naturels impairs. Donnez une expression simple de la quantité A_n.

Q7 Donnez de même une expression simple du produit $B_n = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (2k-1)$. Cette expression fait intervenir une puissance et deux factorielles.

Exercice 3 : calcul intégral

► Notons $f(t) = \sin^4(t)\cos(t)$.

Q1 Linéarisez l'expression $f(t)$.

Q2 Utilisez le résultat de la question précédente pour calculer l'intégrale $J = \int_0^{\pi/2} f(t)\,dt$.

Q3 En fait, il existe une façon bien plus rapide de calculer J. Saurez-vous la (re)trouver ?