Sup PCSI2 — Devoir 2009/08

- $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique et de l'orientation standard. Ainsi, la base canonique $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, jjj, \overrightarrow{k})$ est orthonormée et directe.
- Soit $\overrightarrow{n} = a\overrightarrow{\imath} + b\overrightarrow{\jmath} + c\overrightarrow{k}$ un vecteur unitaire. Notons D la droite engendrée par $\overrightarrow{n}$ et P le plan orthogonal à D.
- Notons $\mathbf{p}$ la projection orthogonale sur D ; $\mathbf{q}$ la projection orthogonale sur P ; $\mathbf{r}$ la transformation qui, à $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$, associe $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{v}$; et $\mathbf{f} = \mathbf{p} + \mathbf{r}$.

Q1 Montrez que $\mathbf{p}(\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$ pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$.

Q2 Déterminez les matrices respectives de $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Q3 Montrez que $\mathbf{r}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q4 Déterminez le noyau et l'image de $\mathbf{r}$.

Q5 Déterminez la matrice de $\mathbf{r}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Q6 Vérifiez que $\mathbf{r} \circ \mathbf{q} = \mathbf{r}$.

Q7 Comparez les normes des vecteurs $\mathbf{r}(\overrightarrow{v})$ et $\mathbf{q}(\overrightarrow{v})$.

Q8 Les vecteurs $\mathbf{r}(\overrightarrow{v})$ et $\mathbf{q}(\overrightarrow{v})$ appartiennent tous les deux au plan P. Celui-ci étant muni de l'orientation induite par $\overrightarrow{n}$, déterminez l'angle de ces vecteurs.

Q9 Montrez que $\mathbf{r} \circ \mathbf{r} = -\mathbf{q}$.

Q10 En déduire l'égalité $\overrightarrow{n} \wedge (\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v})\overrightarrow{n} - \overrightarrow{v}$ pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$.

Q11 Montrez que $\mathbf{f}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q12 Déterminez le noyau de $\mathbf{f}$. Qu'en déduisez-vous ?

Q13 Déterminez la matrice de $\mathbf{f}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Q14 Montrez que $\mathbf{f}$ est un endomorphisme orthogonal.

Q15 Calculez $\mathbf{f}(\overrightarrow{n})$.

Q16 Précisez la restriction de $\mathbf{f}$ à P ; en déduire la nature et les éléments géométriques de $\mathbf{f}$.

- Notons $\mathbf{d} = \mathbf{f} \circ \mathbf{f}$.

Q17 Pour $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$, explicitez $\mathbf{d}(\overrightarrow{v})$ en fonction de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{n}$.

Q18 En déduire la matrice de $\mathbf{d}$ dans la base $\mathcal{B}$. Précisez la nature et les éléments géométriques de $\mathbf{d}$.