$\boxed{\text{Sup PCSI2 — Devoir 2009/07}}$

▶ Dans tout ce problème, E désigne l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}_3[X]$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$; notons Q le quotient et R le reste, dans la division euclidienne de P par $X^2(1-X^2)$. Exprimez les coordonnées (a,b,c,d) de R dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de E, en fonction des réels $P(0)$, $P'(0)$, $P(1)$ et $P(-1)$.

▶ Notons Ψ la fonction qui, à $P \in \mathbb{R}_3[X]$, associe le quadruplet de réels $\big(P(0), P'(0), P(1), P(-1)\big)$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que Ψ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Explicitez la matrice $\mathbf{M}$ de Ψ relativement aux bases canoniques respectives de E et $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Calculez $\mathbf{M}^{-1}$.

▶ Notons $\varphi :\ (P,Q) \in E^2 \mapsto P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1)$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Montrez que φ définit un produit scalaire sur E.

$\boxed{\text{Q6}}$ Explicitez la matrice $\mathbf{A}$ de φ dans la base $\mathcal{B}$.

▶ Notons F le s.e.v. de E engendré par X^2 et X^3, $\mathcal{H}$ la projection orthogonale de E sur F et $\mathbf{H}$ la matrice de $\mathcal{H}$ dans la base canonique de E.

$\boxed{\text{Q7}}$ Quelle relation algébrique *très simple* vérifie $\mathbf{H}$?

$\boxed{\text{Q8}}$ Quel est le rang de $\mathbf{H}$? Quelle est la trace de $\mathcal{H}$?

$\boxed{\text{Q9}}$ Déterminez $\mathbf{H}$.

$\boxed{\text{Q10}}$ La matrice $\mathbf{H}$ n'est pas symétrique ; pourtant, c'est la matrice d'une projection orthogonale. Comment expliquez-vous ceci ?