

- Dans tout ce problème, E désigne l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}_3[X]$.
- Q1 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$; notons Q le quotient et R le reste, dans la division euclidienne de P par $X^2(1 - X^2)$. Exprimez les coordonnées (a, b, c, d) de R dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de E , en fonction des réels $P(0)$, $P'(0)$, $P(1)$ et $P(-1)$.
- Notons Ψ la fonction qui, à $P \in \mathbb{R}_3[X]$, associe le quadruplet de réels $(P(0), P'(0), P(1), P(-1))$.
- Q2 Montrez que Ψ est un isomorphisme de E sur \mathbb{R}^4 .
- Q3 Explicitez la matrice \mathbf{M} de Ψ relativement aux bases canoniques respectives de E et \mathbb{R}^4 .
- Q4 Calculez \mathbf{M}^{-1} .
- Notons $\varphi : (P, Q) \in E^2 \mapsto P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1)$.
- Q5 Montrez que φ définit un produit scalaire sur E .
- Q6 Explicitez la matrice \mathbf{A} de φ dans la base \mathcal{B} .
- Notons F le s.e.v. de E engendré par X^2 et X^3 , \mathcal{H} la projection orthogonale de E sur F et \mathbf{H} la matrice de \mathcal{H} dans la base canonique de E .
- Q7 Quelle relation algébrique *très simple* vérifie \mathbf{H} ?
- Q8 Quel est le rang de \mathbf{H} ? Quelle est la trace de \mathcal{H} ?
- Q9 Déterminez \mathbf{H} .
- Q10 La matrice \mathbf{H} n'est pas symétrique; pourtant, c'est la matrice d'une projection orthogonale. Comment expliquez-vous ceci ?