Matrices de Hadamard

- n est un naturel non nul. L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est à la fois un $\mathbb{R}$-e.v. et un anneau. Notons $\mathbf{I_n}$ la matrice identité d'ordre n et A^T la transposée de la matrice A.
- Une matrice de Hadamard d'ordre n est un élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients appartiennent à l'ensemble $\mathbf{U} = \{+1, -1\}$ et qui vérifie la relation $A \cdot A^T = n\,\mathbf{I_n}$. Nous noterons $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices de Hadamard d'ordre n.
- *Remarque* : vous avez le droit d'écrire 1 à la place de +1.

Q1 Explicitez *tous* les éléments de $\mathcal{H}_2$.

Q2 Explicitez *un* élément de $\mathcal{H}_4$.

Q3 Soit $A \in \mathcal{H}_n$. Montrez que A est inversible, et explicitez son inverse.

Q4 Soit $A \in \mathcal{H}_n$. A-t-on nécessairement $A^{-1} \in \mathcal{H}_n$?

Q5 Soit $A \in \mathcal{H}_n$. A-t-on nécessairement $A^T \in \mathcal{H}_n$?

- Une matrice de Hadamard est *normalisée* si les coefficients de sa première ligne et de sa première colonne sont tous égaux à 1. Par exemple, $\begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice de Hadamard normalisée d'ordre 2.

Q6 Soit $A \in \mathcal{H}_n$. Montrez que si l'on multiplie une ligne ou une colonne de A par -1, la nouvelle matrice obtenue est encore dans $\mathcal{H}_n$.

- Δ_n désigne l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n, dont tous les coefficients diagonaux sont dans $\mathbf{U}$.

Q7 Quel est le cardinal de Δ_n ?

Q8 Soit $A \in \mathcal{H}_n$. Montrez qu'il existe un couple (G, D) d'éléments de Δ_n tels que $G \cdot A \cdot D$ soit une matrice de Hadamard normalisée.

Q9 Le couple (G, D) de la question précédente est-il unique ?

Q10 Montrez que si n est impair et distinct de 1, alors $\mathcal{H}_n$ est vide.

- Notons $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_i}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Fixons $A \in \mathcal{H}_n$. Pour $j \in [\![1,n]\!]$, notons $\overrightarrow{V_j} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} A_{i,j}\,\overrightarrow{e_i}$; ainsi, $\overrightarrow{V_j}$ est le j-ième vecteur colonne de la matrice A.

Q11 Soient j et k deux éléments de $[\![1,n]\!]$. Calculez le produit scalaire $\overrightarrow{V_j} \cdot \overrightarrow{V_k}$. Au besoin, vous distinguerez deux cas de figure.

- Notons $\overrightarrow{V} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \overrightarrow{V_j}$ et $\overrightarrow{W} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \overrightarrow{e_i}$.

Q12 Calculez $\left\|\overrightarrow{V}\right\|^2$ et $\left\|\overrightarrow{W}\right\|^2$.

Q13 Calculez le produit scalaire $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{W}$.

- Notons $\varphi(A) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} A_{i,j}$ la somme de tous les coefficients de A.

Q14 Établissez la majoration $\left|\varphi(A)\right| \leqslant n^{3/2}$.

Q15 Justifiez l'affirmation suivante : si n n'est pas un carré parfait, alors $\left|\varphi(A)\right| < n^{3/2}$.

Q16 Exhibez $A \in \mathcal{H}_4$ vérifiant $\varphi(A) = 4^{3/2}$ et $\operatorname{tr}(A) = -4$.

- Question subsidiaire, pour départager d'éventuels *ex-æquos*.

Q17 Soit A une matrice de Hadamard d'ordre n. Montrez que la matrice décrite par blocs $B = \left(\begin{array}{c|c} +A & +A \\ +A & -A \end{array}\right)$ est une matrice de Hadamard d'ordre $2n$.