

Matrices de Hadamard

- ▶ n est un naturel non nul. L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est à la fois un \mathbb{R} -e.v. et un anneau. Notons \mathbf{I}_n la matrice identité d'ordre n et A^T la transposée de la matrice A .
- ▶ Une matrice de HADAMARD d'ordre n est un élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients appartiennent à l'ensemble $\mathbf{U} = \{+1, -1\}$ et qui vérifie la relation $A \cdot A^T = n \mathbf{I}_n$. Nous noterons \mathcal{H}_n l'ensemble des matrices de HADAMARD d'ordre n .
- ▶ *Remarque* : vous avez le droit d'écrire 1 à la place de +1.

Q1 Explicitez *tous* les éléments de \mathcal{H}_2 .

Q2 Explicitez *un* élément de \mathcal{H}_4 .

Q3 Soit $A \in \mathcal{H}_n$. Montrez que A est inversible, et explicitez son inverse.

Q4 Soit $A \in \mathcal{H}_n$. A-t-on nécessairement $A^{-1} \in \mathcal{H}_n$?

Q5 Soit $A \in \mathcal{H}_n$. A-t-on nécessairement $A^T \in \mathcal{H}_n$?

- ▶ Une matrice de HADAMARD est *normalisée* si les coefficients de sa première ligne et de sa première colonne sont tous égaux à 1. Par exemple, $\begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice de HADAMARD normalisée d'ordre 2.

Q6 Soit $A \in \mathcal{H}_n$. Montrez que si l'on multiplie une ligne ou une colonne de A par -1 , la nouvelle matrice obtenue est encore dans \mathcal{H}_n .

- ▶ Δ_n désigne l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n , dont tous les coefficients diagonaux sont dans \mathbf{U} .

Q7 Quel est le cardinal de Δ_n ?

Q8 Soit $A \in \mathcal{H}_n$. Montrez qu'il existe un couple (G, D) d'éléments de Δ_n tels que $G \cdot A \cdot D$ soit une matrice de HADAMARD normalisée.

Q9 Le couple (G, D) de la question précédente est-il unique ?

Q10 Montrez que si n est impair et distinct de 1, alors \mathcal{H}_n est vide.

- ▶ Notons $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de \mathbb{R}^n . Fixons $A \in \mathcal{H}_n$. Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons $\vec{V}_j = \sum_{1 \leq i \leq n} A_{i,j} \vec{e}_i$; ainsi, \vec{V}_j est le j -ième vecteur colonne de la matrice A .

Q11 Soient j et k deux éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Calculez le produit scalaire $\vec{V}_j \cdot \vec{V}_k$. Au besoin, vous distinguerez deux cas de figure.

- ▶ Notons $\vec{V} = \sum_{1 \leq j \leq n} \vec{V}_j$ et $\vec{W} = \sum_{1 \leq i \leq n} \vec{e}_i$.

Q12 Calculez $\|\vec{V}\|^2$ et $\|\vec{W}\|^2$.

Q13 Calculez le produit scalaire $\vec{V} \cdot \vec{W}$.

- ▶ Notons $\varphi(A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{i,j}$ la somme de tous les coefficients de A .

Q14 Établissez la majoration $|\varphi(A)| \leq n^{3/2}$.

Q15 Justifiez l'affirmation suivante : si n n'est pas un carré parfait, alors $|\varphi(A)| < n^{3/2}$.

Q16 Exhibez $A \in \mathcal{H}_4$ vérifiant $\varphi(A) = 4^{3/2}$ et $\text{tr}(A) = -4$.

- ▶ Question subsidiaire, pour départager d'éventuels *ex-æquos*.

Q17 Soit A une matrice de HADAMARD d'ordre n . Montrez que la matrice décrite par blocs $B = \begin{pmatrix} +A & +A \\ +A & -A \end{pmatrix}$ est une matrice de HADAMARD d'ordre $2n$.