Problème 1

► Une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels vérifie $p_{n+4} = \dfrac{1}{4}\big(p_{n+3} + p_{n+2} + p_{n+1} + p_n\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous lui associons les deux suites $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations :

$$m_n = \min\big(p_{n+3}, p_{n+2}, p_{n+1}, p_n\big) \qquad \text{et} \qquad M_n = \max\big(p_{n+3}, p_{n+2}, p_{n+1}, p_n\big)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Prouvez que $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

$\boxed{\text{Q2}}$ Établissez $m_0 \leqslant m_n \leqslant p_n \leqslant M_n \leqslant M_0$.

$\boxed{\text{Q3}}$ En déduire que les suites $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, et que leurs limites respectives m et M vérifient $m \leqslant M$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Établissez la majoration $p_{n+4} \leqslant \dfrac{3M_n + m_n}{4}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Établissez la majoration $p_{n+4} \leqslant \dfrac{3M_n + m}{4}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Établissez la majoration $M_{n+4} \leqslant \dfrac{3M_n + m}{4}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ En déduire $m = M$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Concluez, pour ce qui concerne la convergence et la limite de la suite de terme général p_n.

Problème 2

► Rappel : $\mathbb{R}_+$ désigne l'intervalle $[0, +\infty[$. Nous notons $\mathcal{E}$ l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, muni de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-e.v.

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit $f \in \mathcal{E}$. Justifiez **rigoureusement** l'existence de la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t} f(t)\, dt$ ainsi que son appartenance à $\mathcal{E}$. Désormais, cette fonction sera notée $\Phi(f)$. Nous définissons ainsi une fonction Φ de $\mathcal{E}$ dans lui-même.

$\boxed{\text{Q2}}$ Soient $f \in \mathcal{E}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. Que pensez-vous des notations $\big(\Phi(f)\big)(x)$, $\Phi(f)(x)$ et $\Phi\big(f(x)\big)$?

$\boxed{\text{Q3}}$ Prouvez que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Soient $f \in \mathcal{E}$ et $F = \Phi(f)$. Combien vaut $F(0)$? Φ est-il surjectif ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Φ est-il injectif ?

$\boxed{\text{Q6}}$ Soit $F \in \mathcal{E}$ vérifiant $F(0) = 0$. Montrez qu'il existe un et un seul élément f de $\mathcal{E}$ tel que $\Phi(f) = F$. Vous expliciterez f en fonction de F.

► Rappel : une fonction f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, est dite *bornée* s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $\big|f(x)\big| \leqslant M$ pour tout $x \in I$. Notez bien que M dépend de f.

► Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ qui sont bornés.

$\boxed{\text{Q7}}$ Montrez que $\mathcal{B}$ est stable par Φ.

$\boxed{\text{Q8}}$ Donnez un autre exemple **intéressant** de s.e.v. de $\mathcal{E}$ stable par Φ. Bien entendu, vous donnerez une preuve à l'appui de votre exemple !