

**Problème 1**

- Une suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels vérifie  $p_{n+4} = \frac{1}{4}(p_{n+3} + p_{n+2} + p_{n+1} + p_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Nous lui associons les deux suites  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par les relations :

$$m_n = \min(p_{n+3}, p_{n+2}, p_{n+1}, p_n) \quad \text{et} \quad M_n = \max(p_{n+3}, p_{n+2}, p_{n+1}, p_n)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- Q1 Prouvez que  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante.
- Q2 Établissez  $m_0 \leq m_n \leq p_n \leq M_n \leq M_0$ .
- Q3 En déduire que les suites  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent, et que leurs limites respectives  $m$  et  $M$  vérifient  $m \leq M$ .
- Q4 Établissez la majoration  $p_{n+4} \leq \frac{3M_n + m_n}{4}$ .
- Q5 Établissez la majoration  $p_{n+4} \leq \frac{3M_n + m}{4}$ .
- Q6 Établissez la majoration  $M_{n+4} \leq \frac{3M_n + m}{4}$ .
- Q7 En déduire  $m = M$ .
- Q8 Concluez, pour ce qui concerne la convergence et la limite de la suite de terme général  $p_n$ .

**Problème 2**

- Rappel :  $\mathbb{R}_+$  désigne l'intervalle  $[0, +\infty[$ . Nous notons  $\mathcal{E}$  l'ensemble  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ , muni de sa structure naturelle de  $\mathbb{R}$ -e.v.

- Q1 Soit  $f \in \mathcal{E}$ . Justifiez **rigoureusement** l'existence de la fonction  $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^x e^{-t} f(t) dt$  ainsi que son appartenance à  $\mathcal{E}$ . Désormais, cette fonction sera notée  $\Phi(f)$ . Nous définissons ainsi une fonction  $\Phi$  de  $\mathcal{E}$  dans lui-même.
- Q2 Soient  $f \in \mathcal{E}$  et  $x \in \mathbb{R}_+$ . Que pensez-vous des notations  $(\Phi(f))(x)$ ,  $\Phi(f)(x)$  et  $\Phi(f(x))$  ?
- Q3 Prouvez que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{E}$ .
- Q4 Soient  $f \in \mathcal{E}$  et  $F = \Phi(f)$ . Combien vaut  $F(0)$  ?  $\Phi$  est-il surjectif ?
- Q5  $\Phi$  est-il injectif ?
- Q6 Soit  $F \in \mathcal{E}$  vérifiant  $F(0) = 0$ . Montrez qu'il existe un et un seul élément  $f$  de  $\mathcal{E}$  tel que  $\Phi(f) = F$ . Vous explicitez  $f$  en fonction de  $F$ .
- Rappel : une fonction  $f$ , définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs réelles, est dite *bornée* s'il existe un réel  $M \geq 0$  tel que  $|f(x)| \leq M$  pour tout  $x \in I$ . Notez bien que  $M$  dépend de  $f$ .
- Notons  $\mathcal{B}$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{E}$  qui sont bornés.
- Q7 Montrez que  $\mathcal{B}$  est stable par  $\Phi$ .
- Q8 Donnez un autre exemple **intéressant** de s.e.v. de  $\mathcal{E}$  stable par  $\Phi$ . Bien entendu, vous donnerez une preuve à l'appui de votre exemple !