Exercice 1 : anneaux

► Nous nous proposons de montrer qu'un anneau $(A,+,\times)$ qui vérifie $x^3 = x$ pour tout $x \in A$ est commutatif. Notons $f(x,y) = (x+y)^3 - x^3 - y^3$.

Q1 Développez $f(x,y)$.

Q2 En déduire la formule $x^2y + xy^2 + xyx + yxy + yx^2 + y^2x = 0$.

Q3 Développez $f(x, y+z)$.

Q4 Prouvez la formule $xyz + yzx + zxy + xzy + zyx + yxz = 0$.

Q5 En développant $xf(x,y) - f(x,y)x$, établissez la formule $xy - yx + x^2y^2 - y^2x^2 + (xy)^2 - (yx)^2 = 0$.

Q6 En remplaçant z par $x-y$ dans la formule établie à la Q4, prouvez la relation $x^2y^2 - y^2x^2 + (xy)^2 - (yx)^2 = 0$.

Q7 Il ne vous reste plus qu'à conclure !

Exercice 2

► Nous nous proposons de déterminer la limite de la suite de terme général $S_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k^2}$.

► Pour $s \in \mathbb{N}$, nous noterons $J_s = \int_0^{\pi/2} \cos^{2s}(t)\,dt$ et $K_s = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2s}(t)\,dt$.

► **Toutes les intégrations par parties devront être soigneusement justifiées**.

Q1 Calculez J_0 et K_0.

Q2 Pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, établissez l'inégalité $t \leqslant \frac{\pi}{2} \sin(t)$.

Q3 Pour $s \in \mathbb{N}$, établissez l'encadrement $0 \leqslant K_s \leqslant \frac{\pi^2}{4}(J_s - J_{s+1})$.

Q4 Pour $s \in \mathbb{N}$, écrivez une relation entre J_{s+1} et J_s.

Q5 Montrez que la suite de terme général $\frac{K_s}{J_s}$ converge vers 0.

Q6 Soit $s \in \mathbb{N}$. En effectuant deux intégrations par parties, exprimez J_{s+1} en fonction de K_{s+1} et K_s.

Q7 Soit $s \in \mathbb{N}$. Démontrez la relation $\frac{K_s}{J_s} - \frac{K_{s+1}}{J_{s+1}} = \frac{1}{2(s+1)^2}$

Q8 Déterminez la limite de la suite de terme général S_n.