

Exercice 1 : anneaux

- Nous nous proposons de montrer qu'un anneau $(A, +, \times)$ qui vérifie $x^3 = x$ pour tout $x \in A$ est commutatif. Notons $f(x, y) = (x + y)^3 - x^3 - y^3$.

- Q1 Développez $f(x, y)$.
- Q2 En déduire la formule $x^2y + xy^2 + xyx + yxy + yx^2 + y^2x = 0$.
- Q3 Développez $f(x, y + z)$.
- Q4 Prouvez la formule $xyz + yzx + zxy + xzy + zyx + yxz = 0$.
- Q5 En développant $xf(x, y) - f(x, y)x$, établissez la formule $xy - yx + x^2y^2 - y^2x^2 + (xy)^2 - (yx)^2 = 0$.
- Q6 En remplaçant z par $x - y$ dans la formule établie à la Q4, prouvez la relation $x^2y^2 - y^2x^2 + (xy)^2 - (yx)^2 = 0$.
- Q7 Il ne vous reste plus qu'à conclure !

Exercice 2

- Nous nous proposons de déterminer la limite de la suite de terme général $S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k^2}$.

- Pour $s \in \mathbb{N}$, nous noterons $J_s = \int_0^{\pi/2} \cos^{2s}(t) dt$ et $K_s = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2s}(t) dt$.

- **Toutes les intégrations par parties devront être soigneusement justifiées.**

- Q1 Calculez J_0 et K_0 .
- Q2 Pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, établissez l'inégalité $t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t)$.
- Q3 Pour $s \in \mathbb{N}$, établissez l'encadrement $0 \leq K_s \leq \frac{\pi^2}{4}(J_s - J_{s+1})$.
- Q4 Pour $s \in \mathbb{N}$, écrivez une relation entre J_{s+1} et J_s .
- Q5 Montrez que la suite de terme général $\frac{K_s}{J_s}$ converge vers 0.
- Q6 Soit $s \in \mathbb{N}$. En effectuant deux intégrations par parties, exprimez J_{s+1} en fonction de K_{s+1} et K_s .
- Q7 Soit $s \in \mathbb{N}$. Démontrez la relation $\frac{K_s}{J_s} - \frac{K_{s+1}}{J_{s+1}} = \frac{1}{2(s+1)^2}$.
- Q8 Déterminez la limite de la suite de terme général S_n .