

**Partie 1**

► Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $H_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k}$  et  $r_n = H_n - \ln(n)$ .

Q1 Pour  $k \geq 2$ , établissez  $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$ .

Q2 En déduire  $\ln(n) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$ .

Q3 Quel est le sens de variation de la suite  $(r_n)_{n \geq 1}$  ?

Q4 Montrez que la suite  $(r_n)_{n \geq 1}$  converge ; nous noterons  $\gamma$  sa limite.

► Pour  $k \geq 2$ , notons  $v_k = \int_{k-1}^k \frac{t-k+1}{t^2} dt$ .

Q5 Justifiez l'encadrement  $0 \leq v_k \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ .

Q6 Montrez que la suite de terme général  $V_n = \sum_{2 \leq k \leq n} v_k$  converge.

Q7 Pour  $n \geq 1$ , justifiez :  $\lim_{p \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=n+1}^p v_k \right) = r_n - \gamma$ .

Q8 En déduire  $0 \leq r_n - \gamma \leq \frac{1}{n}$ .

**Partie 2**

► L'encadrement qui conclut la première partie montre que la convergence vers  $\gamma$  de la suite de terme général  $r_n$  est trop lente ; nous nous proposons donc d'accélérer cette convergence.

Q9 Pour  $k \geq 2$ , notons  $I_k = \int_0^1 \frac{x(1-x)(1-2x)}{(x+k-1)^4} dx$ . Au moyen d'intégrations par parties répétées (et dûment justifiées), établissez :

$$I_k = 2v_k + \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2} \right)$$

Q10 Toujours pour  $k \geq 2$ , notons  $J_k = \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{(x+k-1)^5} dx$ . Justifiez :

$$J_k = v_k + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right) + \frac{1}{12} \left( \frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2} \right)$$

Q11 Quel est le maximum de la fonction  $x \in [0, 1] \mapsto x(1-x)$  ?

Q12 Toujours pour  $k \geq 2$ , établissez :  $0 \leq J_k \leq \frac{1}{64} \left( \frac{1}{(k-1)^4} - \frac{1}{k^4} \right)$ .

Q13 En déduire, pour  $n \geq 1$  :  $0 \leq r_n - \gamma - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} \leq \frac{1}{64n^4}$

Q14 Quel développement asymptotique de  $H_n$  pouvez-vous en tirer ?

Q15 Quelle est la plus petite valeur de  $n$  pour laquelle vous pouvez affirmer que  $r_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2}$  est une valeur approchée de  $\gamma$  avec une erreur au plus égale à  $5 \cdot 10^{-7}$  ?