- Rappel : toute suite de réels croissante et majorée converge.
- Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, nous notons $k^x = \exp\big(x\ln(k)\big)$.
- Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, nous notons $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$.
- Lorsque la suite de terme général $S_n(x)$ converge, sa limite sera notée $S(x)$.

Préliminaires

Q1 Montrez que, pour $x > 0$ fixé, la suite de terme général $S_n(x)$ est croissante.

Q2 Montrez que, pour n fixé, la fonction $x > 0 \mapsto S_n(x)$ est décroissante.

Q3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \geqslant n+1$; calculez $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k(k+1)}$, puis $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k(k+1)}$.

Q4 La suite de terme général $S_n(1)$ converge-t-elle ?

Q5 Établissez la convergence de la suite de terme général $S_n(2)$; vous pourrez utiliser l'inégalité $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)}$, pour $k \geqslant 2$.

Q6 Montrez que $S(2) \in \,]1,2]$.

Q7 $\star\star$ Établissez l'existence d'un réel $\ell \in [1,2]$ tel que : si $x \in \,]0,\ell[$, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n(x) = +\infty$; si $x \in \,]\ell,+\infty[$, alors la suite de terme général $S_n(x)$ converge.

Q8 Pour $n \geqslant 1$ et $x > 1$, établissez :

$$\frac{1}{1-x}\big((n+1)^{1-x} - 1\big) \leqslant S_n(x) \leqslant 1 + \frac{1}{1-x}\big(n^{1-x} - 1\big)$$

Indication : encadrez $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x}$.

Q9 En déduire la valeur de ℓ.