

- ▶ Rappel : toute suite de réels croissante et majorée converge.
- ▶ Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, nous notons $k^x = \exp(x \ln(k))$.
- ▶ Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, nous notons $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x}$.
- ▶ Lorsque la suite de terme général $S_n(x)$ converge, sa limite sera notée $S(x)$.

Préliminaires

- Q1 Montrez que, pour $x > 0$ fixé, la suite de terme général $S_n(x)$ est croissante.
- Q2 Montrez que, pour n fixé, la fonction $x > 0 \mapsto S_n(x)$ est décroissante.
- Q3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \geq n + 1$; calculez $\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k(k+1)}$, puis $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k(k+1)}$.
- Q4 La suite de terme général $S_n(1)$ converge-t-elle ?
- Q5 Établissez la convergence de la suite de terme général $S_n(2)$; vous pourrez utiliser l'inégalité $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$, pour $k \geq 2$.
- Q6 Montrez que $S(2) \in]1, 2]$.
- Q7 ★★ Établissez l'existence d'un réel $\ell \in [1, 2]$ tel que : si $x \in]0, \ell[$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = +\infty$; si $x \in]\ell, +\infty[$, alors la suite de terme général $S_n(x)$ converge.
- Q8 Pour $n \geq 1$ et $x > 1$, établissez :

$$\frac{1}{1-x} ((n+1)^{1-x} - 1) \leq S_n(x) \leq 1 + \frac{1}{1-x} (n^{1-x} - 1)$$

Indication : encadrez $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x}$.

- Q9 En déduire la valeur de ℓ .