$\boxed{\text{PCSI2 — Interrogation du mardi 13 avril 2010}}$

Groupe PC

$\boxed{\text{Q1}}$ • Calculez la limite de $A = \dfrac{1-\cos(3x)}{x(2-x)\tan(5x)}$ lorsque x tend vers 0.

• $1-\cos(3x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{9x^2}{2}$; $2-x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$; et $\tan(5x) \underset{x\to 0}{\sim} 5x$. Donc $A \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{9x^2}{2}}{10x^2}$.

• Concluons : $\boxed{A \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{9}{20}}$

$\boxed{\text{Q2}}$ • Calculez la limite de $B = \dfrac{\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)}{(3x-\pi)\tan(x)}$ lorsque x tend vers $\pi/3$.

• Notons $h = x - \dfrac{\pi}{3}$. Pour ce qui est du numérateur, observons que nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x) &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)-\frac{1}{2}\sin(x)\right) = 2\left(\cos(\pi/6)\cos(x)-\sin(\pi/6)\sin(x)\right)\\ &= 2\cos(x+\pi/6) = 2\cos(h+\pi/3+\pi/6) = -2\sin(h) \underset{h\to 0}{\sim} -2h\end{aligned}$$

D'autre part $3x-\pi = 3h$ et $\tan(x) \underset{x\to\pi/3}{\longrightarrow} \sqrt{3}$. Donc $B \underset{x\to\pi/3}{\sim} -\dfrac{2h}{3h\sqrt{3}}$.

• Concluons : $\boxed{B \underset{x\to\pi/3}{\longrightarrow} -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$

$\boxed{\text{Q3}}$ • Calculez la limite de $C = \dfrac{\sin(2x)-\sin(x)}{\sin(3x)-\sin(x)}$ lorsque x tend vers $\pi/2$.

• La formule $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ peut s'écrire $\sin(u) = u + o(u)$; alors $\sin(2u)-\sin(u) = u + o(u)$, ce qui s'écrit aussi $\sin(2u)-\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$. De la meme façon, nous obtenons $\sin(3u)-\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} 2u$.

• Concluons : $\boxed{C \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}}$

$\boxed{\text{Q4}}$ • Calculez la limite de $D = \dfrac{\cos(5x)}{\cos(3x)}$ lorsque x tend vers $\pi/2$.

• Notons $h = x - \dfrac{\pi}{2}$. Alors $\cos(5x) = \cos\Big(\dfrac{5\pi}{2}+5h\Big) = \cos\Big(\dfrac{\pi}{2}+5h\Big) = -\sin(5h)$. De meme, nous avons $\cos(3x) = \cos\Big(\dfrac{3\pi}{2}+3h\Big) = -\cos\Big(\dfrac{\pi}{2}+3h\Big) = \sin(3h)$. Mais h tend vers 0 lorsque x tend vers $\pi/2$. Donc $D \underset{h\to 0}{\sim} -\dfrac{\sin(5h)}{\sin(3h)}$; mais $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, donc $D \underset{h\to 0}{\sim} -\dfrac{5h}{3h}$.

• Concluons : $\boxed{D \underset{x\to\pi/2}{\longrightarrow} -\dfrac{5}{3}}$

$\boxed{\text{Q5}}$ • Donnez un équivalent simple de $E = \sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} - \sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

• La formule $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ nous permet d'écrire E sous la forme suivante :

$$E = \frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}}$$

Nous voyons tout de suite que le numérateur est égal à $\dfrac{3}{x^2}$.

Notons K le dénominateur ; il peut s'écrire $K = \sqrt{\dfrac{1}{x}}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}\right)$, donc $K \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

• Concluons : $\boxed{E \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{2x\sqrt{x}}}$

$\boxed{\text{Q6}}$ • Donnez un équivalent simple de $F = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) + \arctan\left(\dfrac{2}{x}\right) - \arctan\left(\dfrac{3}{x}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

• Nous utilisons le développement limité à l'ordre 3 de tan, au voisinage de 0 : $\arctan(u) = u - \dfrac{u^3}{3} + o(u^3)$.
En remplaçant u par $1/x$, il vient :

$$\begin{aligned}&\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{2}{x}\right) - \arctan\left(\frac{3}{x}\right)\\ &\qquad = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{2}{x} - \frac{8}{3x^3} - \frac{3}{x} + \frac{27}{3x^3} + o(1/x^3) = \frac{18}{3x^3} + o(1/x^3) = \frac{6}{x^3} + o(1/x^3)\end{aligned}$$

• Concluons : $\boxed{F \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{6}{x^3}}$