

## Groupe PC

**Q1** • Calculez la limite de  $A = \frac{1 - \cos(3x)}{x(2-x)\tan(5x)}$  lorsque  $x$  tend vers 0.

•  $1 - \cos(3x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{9x^2}{2}$  ;  $2 - x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$  ; et  $\tan(5x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 5x$ . Donc  $A \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{9x^2}{2}}{10x^2}$ .

• Concluons :  $\boxed{A \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{9}{20}}$

**Q2** • Calculez la limite de  $B = \frac{\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x)}{(3x - \pi)\tan(x)}$  lorsque  $x$  tend vers  $\pi/3$ .

• Notons  $h = x - \frac{\pi}{3}$ . Pour ce qui est du numérateur, observons que nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) &= 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) \right) = 2 \left( \cos(\pi/6)\cos(x) - \sin(\pi/6)\sin(x) \right) \\ &= 2\cos(x + \pi/6) = 2\cos(h + \pi/3 + \pi/6) = -2\sin(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -2h \end{aligned}$$

D'autre part  $3x - \pi = 3h$  et  $\tan(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pi/3} \sqrt{3}$ . Donc  $B \underset{x \rightarrow \pi/3}{\sim} -\frac{2h}{3h\sqrt{3}}$ .

• Concluons :  $\boxed{B \xrightarrow{x \rightarrow \pi/3} -\frac{2}{3\sqrt{3}}}$

**Q3** • Calculez la limite de  $C = \frac{\sin(2x) - \sin(x)}{\sin(3x) - \sin(x)}$  lorsque  $x$  tend vers  $\pi/2$ .

• La formule  $\sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$  peut s'écrire  $\sin(u) = u + o(u)$  ; alors  $\sin(2u) - \sin(u) = u + o(u)$ , ce qui s'écrit aussi  $\sin(2u) - \sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ . De la même façon, nous obtenons  $\sin(3u) - \sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} 2u$ .

• Concluons :  $\boxed{C \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}}$

**Q4** • Calculez la limite de  $D = \frac{\cos(5x)}{\cos(3x)}$  lorsque  $x$  tend vers  $\pi/2$ .

• Notons  $h = x - \frac{\pi}{2}$ . Alors  $\cos(5x) = \cos\left(\frac{5\pi}{2} + 5h\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5h\right) = -\sin(5h)$ . De même, nous avons  $\cos(3x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3h\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + 3h\right) = \sin(3h)$ . Mais  $h$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $\pi/2$ . Donc  $D \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\sin(5h)}{\sin(3h)}$  ; mais  $\sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ , donc  $D \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -\frac{5h}{3h}$ .

• Concluons :  $\boxed{D \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2} -\frac{5}{3}}$

**Q5** • Donnez un équivalent simple de  $E = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

• La formule  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$  nous permet d'écrire  $E$  sous la forme suivante :

$$E = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}}$$

Nous voyons tout de suite que le numérateur est égal à  $\frac{3}{x^2}$ .

Notons  $K$  le dénominateur ; il peut s'écrire  $K = \sqrt{\frac{1}{x}} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}} \right)$ , donc  $K \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{x}}$ .

• Concluons :  $\boxed{E \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{2x\sqrt{x}}}$

Q6 • Donnez un équivalent simple de  $F = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{2}{x}\right) - \arctan\left(\frac{3}{x}\right)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

• Nous utilisons le développement limité à l'ordre 3 de  $\tan$ , au voisinage de 0 :  $\arctan(u) = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$ .

En remplaçant  $u$  par  $1/x$ , il vient :

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{2}{x}\right) - \arctan\left(\frac{3}{x}\right) \\ = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{2}{x} - \frac{8}{3x^3} - \frac{3}{x} + \frac{27}{3x^3} + o(1/x^3) = \frac{18}{3x^3} + o(1/x^3) = \frac{6}{x^3} + o(1/x^3) \end{aligned}$$

• Concluons :  $F \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{6}{x^3}$