Sup PCSI2 — Contrôle 2008/01

Exercice 1 : résolution d'une équation

► Notons $f: z \in \mathbb{C} \mapsto z^4 + 4iz^3 + (3+12i)z^2 - (24-14i)z + 12 + 36i$. Nous nous intéressons à l'équation $f(z) = 0$, que nous noterons $(\mathcal{E})$.

Q1 Montrez que $(\mathcal{E})$ possède au moins une solution imaginaire pure, que vous calculerez.

Q2 Déterminez les autres solutions de $(\mathcal{E})$.

Q3 Représentez, dans le plan complexe, les images des solutions de $(\mathcal{E})$.

Q4 Que pouvez-vous dire du polygone dont les sommets sont les images des solutions de $(\mathcal{E})$?

Exercice 2 : des calculs de toutes sortes

► Rappel : $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ et $e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$.

► Les deux questions qui suivent sont liées.

Q1 Énoncez et démontrez les formules qui expriment $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ en fonction de $\sin(a)$, $\sin(b)$, $\cos(a)$ et $\cos(b)$.

Q2 Utilisez ces formules pour déterminer $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

► Les deux questions qui suivent sont liées.

Q3 Donnez (sans preuve) les diverses expressions de $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Q4 Utilisez certaines de ces formules pour calculer les valeurs de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

► Les questions suivantes sont indépendantes les unes des autres.

Q5 Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x) + \sin(7x) = 0$.

Q6 Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $2^{\sin^2(x)} = \cos(x)$.

Q7 ⋆ Calculez $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{38}(t)\cos^3(t)\,dt$. Vous présenterez le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

Problème

Quelques questions de cours

Q1 Soient $u \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$; énoncez et démontrez la formule donnant une expression simple de $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} u^k$.

► Soit $n \geqslant 1$. Pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, notons $\zeta_k = \exp\left(\frac{2ki\pi}{n}\right)$. Les ζ_k sont les n racines n-ièmes de l'unité.

Q2 Combien vaut la somme $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k < n} \zeta_k$ de toutes ces racines ?

La fonction cotan

▶ La fonction « cotangente », notée cotan, est définie comme suit : $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Quel est l'ensemble de définition de cette fonction ?

$\boxed{\text{Q4}}$ Cette fonction est-elle paire ? Impaire ? Ni l'un ni l'autre ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Cette fonction est-elle périodique ? Si oui, quelle est sa période ?

▶ La fonction cotan est clairement dérivable sur son ensemble de définition. On ne vous demande pas de le prouver.

$\boxed{\text{Q6}}$ Explicitez sa dérivée ; si possible, vous donnerez deux expressions différentes.

▶ Notons g la restriction de la fonction cotan à l'intervalle $]0, \pi[$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Dressez le tableau des variations de g ; vous commencerez par étudier le signe de $g'(x)$ en fonction de x.

$\boxed{\text{Q8}}$ Donnez l'allure de la courbe représentative de g, en faisant apparaître d'éventuelles asymptotes.

$\boxed{\text{Q9}}$ Calculez l'intégrale $J = \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{cotan}(t)\, dt$.

Résolution d'une équation dans $\mathbb{C}$

$\boxed{\text{Q10}}$ Soit $\varphi \in]0, 2\pi[$. Résolvez l'équation $\dfrac{u+i}{u-i} = e^{i\varphi}$.

▶ Soit $n \geqslant 2$. Nous noterons $(\mathcal{E}_n)$ l'équation $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k < n} \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^k = 0$, dans laquelle l'inconnue est z, bien entendu !

$\boxed{\text{Q11}}$ Montrez que le complexe z est solution de $(\mathcal{E}_n)$ si et seulement si $\dfrac{z+i}{z-i}$ est une racine n-ième de 1 autre que 1.

$\boxed{\text{Q12}}$ Montrez alors que $(\mathcal{E}_n)$ possède exactement $n-1$ solutions, que vous noterez $z_1, \ldots, z_{n-1}$; vous donnerez une expression **très simple** de z_k, faisant intervenir la fonction cotan, étudiée plus haut.

$\boxed{\text{Q13}}$ Calculez la somme des solutions de $(\mathcal{E}_n)$.