Sup PCSI2 — Contrôle 2005/04

▶ Avant de lire l'énoncé, prenez connaissance des directives énumérées en bas de la deuxième page !

Exercice 1 : une suite de questions...

Q1 Quelle est la limite de la suite de terme général $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$?

Q2 Exhibez une suite (u_n) qui converge vers 0, et telle que $(1+u_n)^n$ converge vers 1.

Q3 Exhibez une suite (v_n) qui converge vers 0, et telle que $(1+v_n)^n$ diverge vers $+\infty$.

Q4 Exhibez une suite (w_n) qui converge vers 0, et telle que $(1+w_n)^n$ converge vers 0.

Q5 Soit $\lambda > 0$. Exhibez une suite (x_n) qui converge vers 0, et telle que $(1+x_n)^n$ converge vers λ.

Q6 ⋆⋆ La suite (u_n) est bornée mais ne converge pas. La suite (v_n) n'est pas bornée, mais elle ne diverge ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$. La suite de terme général $u_n v_n$ peut-elle converger vers 0 ?

▶ *Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Les réponses qui ne sont pas accompagnées d'une preuve ou d'un contre-exemple (avec justification précise) ne seront pas prises en compte. Toutes les suites considérées sont des suites de réels.*

Q7 Si la suite (u_n) diverge vers $+\infty$, alors $\lfloor u_n \rfloor \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$.

Q8 Si la suite (u_n) diverge vers $+\infty$, alors $\ln(2u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(u_n)$.

Q9 Si la suite (u_n) diverge vers $+\infty$, alors $\ln\big(\lfloor u_n \rfloor\big) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(u_n)$.

Q10 Si la suite (u_n) diverge vers $+\infty$, alors $\lfloor \exp(u_n) \rfloor \underset{n\to\infty}{\sim} \exp(u_n)$.

Q11 Si la suite (u_n) diverge vers $+\infty$, alors $\exp\big(\lfloor u_n \rfloor\big) \underset{n\to\infty}{\sim} \exp(u_n)$.

Q12 Si la suite (x_n) converge vers 0 et si $u_n \leqslant \frac{x_n}{2}$ à partir d'un certain rang, alors la suite (u_n) converge également vers 0.

Exercice 2 : quelques calculs

▶ Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

Q1 Rappelez (sans preuves) les définitions respectives de $\mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{ch}(x)$, puis les formules qui expriment $\mathrm{sh}(2x)$ et $\mathrm{ch}(2x)$ en fonction de $\mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{ch}(x)$.

Q2 Calculez $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \mathrm{sh}(2t)\,\mathrm{ch}^2(t)\,dt$. Le résultat sera donné sous forme d'une fraction irréductible.

Q3 Calculez la limite de la suite de terme général $S_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

Q4 ⋆⋆ Donnez un équivalent *simple* de $T_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{(k-1)\pi}{n}\right)$ lorsque n tend vers l'infini.

Q5 ⋆⋆ Calculez la limite de la suite de terme général $x_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+2008!}\right)$.

Tournez S.V.P.

Exercice 3

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous noterons $f_n : x \geqslant 0 \mapsto \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{x^k}{k}$.

- Dans une première partie, nous étudions la suite de terme général $u_n = f_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

Q1 Dressez un tableau donnant les valeurs de u_1, u_2, u_3 et u_4 ; bien entendu, les fractions seront réduites !

Q2 Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$?

Q3 Donnez une expression *très simple* de $S_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} 2^{-k}$.

Q4 En déduire l'inégalité $u_n < 1$.

Q5 En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge et donnez un encadrement de sa limite α.

Q6 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant x < 1$, justifiez l'existence de l'intégrale $I(n, x) = \int_0^x \frac{1 - t^n}{1 - t}\, dt$.

Q7 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant x < 1$, prouvez l'égalité $I(n, x) = f_n(x)$.

Q8 L'égalité précédente reste-t-elle vraie pour $x = 1$?

Q9 Justifiez l'existence de l'intégrale $J = \int_0^{1/2} \frac{dt}{1 - t}$ puis calculez J.

Q10 Montrez que la suite de terme général $J - u_n$ converge vers 0.

Q11 Finalement, quelle est la valeur *exacte* de α ?

- Nous nous intéressons maintenant à une suite de réels définie implicitement à partir de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 1}$.

Q12 Montrez que f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même.

Q13 En déduire que l'équation $f_n(x) = 1$ possède, dans $\mathbb{R}_+$, une et une seule solution, que nous noterons x_n.

Q14 Explicitez x_1, puis x_2.

Q15 Calculez $f_3\left(\frac{2}{3}\right)$.

Q16 $\star\star$ En déduire la valeur de $\lfloor 81 x_3 \rfloor$.

Q17 Montrez que la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est strictement monotone.

Q18 En déduire que la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ converge. Nous noterons désormais ℓ sa limite.

Q19 Avec les informations disponibles, quel encadrement pouvez-vous donner de ℓ ?