Sup PCSI2 — Devoir 2004/07

Q1 Soient A et B deux matrices carrées symétriques d'ordre n. Montrez que A et B commutent ssi leur produit AB est lui-même symétrique.

Q2 Énoncez et démontrez une propriété analogue, dans le cas de deux matrices carrées antisymétriques.

► Pour $(p, q, r) \in \mathbb{R}^3$, définissons :

$$\mathbf{T}_{p,q,r} = \begin{pmatrix} p & q & r \\ q & p+r & q \\ r & q & p \end{pmatrix}$$

Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des matrices $\mathbf{T}_{p,q,r}$, où (p, q, r) décrit $\mathbb{R}^3$.

Q3 Montrez que $\mathcal{V}$ est un s.e.v. de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q4 Exhibez une base *très simple* de $\mathcal{V}$.

Q5 Montrez que $\mathcal{V}$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q6 Ce sous-anneau est-il commutatif ?

► Notons $Q = \mathbf{T}_{1,0,-3}$.

Q7 Calculez Q^2, en déduire une relation liant Q, Q^2 et I_3.

Q8 Prouvez que Q est inversible, et explicitez Q^{-1}.

Q9 Calculez le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 2X - 8$.

Q10 En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de Q^n en fonction de Q, I_3 et n.

Q11 Nous venons d'établir une expression de Q^n, pour $n \in \mathbb{N}$. Cette expression est-elle encore valable pour $n \in \mathbb{Z}$?