Sup PCSI2 — Devoir 2003/06

► $\mathcal{E}$ est le $\mathbb{R}$-e.v. des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Q1 Soient $f \in \mathcal{E}$ et $x \in \mathbb{R}$. Justifiez l'existence de $\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$. Indication : le nom F n'est pas utilisé dans cet énoncé ; il est donc disponible, pour désigner un objet intéressant, ayant une forte affinité avec f...

► Le résultat de la question précédente nous permet de définir la fonction G qui, au réel x, associe $\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$.

Q2 Montrez que G est de classe $\mathcal{C}^1$ et explicitez $G'(x)$.

Q3 Dans cette question uniquement, f est la fonction qui, au réel t, associe $\sin\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)$. Explicitez $G(x)$.

Q4 Dans cette question uniquement, f est la fonction « valeur absolue » : $f(t) = |t|$ pour tout réel t. Explicitez $G(x)$; vous serez amené à examiner plusieurs cas de figure selon la valeur de x..

► Revenons au cas général : $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ étant contenu dans $\mathcal{E}$, il est naturel de s'intéresser à fonction Φ qui, à f, associe G.

► Pour $f \in \mathcal{E}$, nous avons donc $\Phi(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$.

Q5 Que pensez-vous de chacune des trois notations suivantes :

$$\big(\Phi(f)\big)(x) \qquad \Phi(f)(x) \qquad \Phi\big(f(x)\big)$$

Q6 Prouvez que Φ est linéaire.

Q7 Prouvez que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

Q8 Φ est-il injectif ?

Q9 Φ est-il surjectif ?

Q10 Montrez que si f est bornée, alors $\Phi(f)$ est elle-même bornée.

Q11 Montrez que si f est croissante, alors $\Phi(f)$ est elle-même croissante.

Q12 Supposons f paire. Peut-on dire quelque chose de la parité de $\Phi(f)$?

Q13 Même question si f est impaire.

Q14 Il est clair que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est un s.e.v. de $\mathcal{E}$. Montrez qu'il est stable par Φ.

Q15 Donnez des exemples *intéressants* de sous-espaces de $\mathcal{E}$ stables par Φ.

Q16 Soit $f \in \mathcal{E}$; nous dirons que f est invariante par Φ lorsque $\Phi(f) = f$. Par exemple, la fonction nulle est invariante par Φ. Donnez un autre exemple d'élément de $\mathcal{E}$ invariant par Φ.