Sup PCSI2 — Contrôle 2000/05

INDIQUEZ VOTRE NOM SUR CHAQUE COPIE. N'UTILISEZ NI ENCRE ROUGE, NI CRAYON, NI TIP-PEX.

Partie 1

Q1 Discutez le signe de $p(x) = x^2 - 8x - 14$ en fonction de x.

► Notons $q:\ x \in \mathbb{R} \mapsto 8e^x + 14 - e^{2x}$.

Q2 Prouvez l'existence d'un réel α tel que le signe de $q(x)$ soit celui de $\alpha - x$.

Q3 En utilisant l'encadrement (admis) $\dfrac{5}{2} < e < 3$, montrez que α appartient à l'intervalle $]2,3[$.

► Notons $r:\ x \in \mathbb{R} \mapsto 16e^x + 28x - e^{2x}$.

Q4 Calculez $r(\alpha)$; vous simplifierez au maximum l'expression obtenue !

Q5 Quel est le signe de $r(\alpha)$?

Q6 Étudiez rapidement les variations de r.

Q7 Montrez que l'équation $r(x) = 0$ possède deux solutions réelles, qui seront notées β et γ, avec $\beta < \gamma$.

Q8 Quel est le signe de β ?

► Notons $s:\ x \in \mathbb{R} \mapsto 32e^x + 28x^2 - e^{2x}$.

Q9 Étudiez rapidement les variations de s.

Q10 Donnez une expression simplifiée de $s(\beta)$, puis déterminez le signe de $s(\beta)$.

Q11 Montrez que l'équation $s(x) = 0$ possède une et une seule solution réelle, qui sera notée δ. Placez δ par rapport aux nombres précédemment introduits.

Q12 Discutez le signe de $s(x)$ en fonction de x.

Partie 2

► Cette partie est indépendante de la précédente. Elle doit **IMPÉRATIVEMENT** être rédigée sur une copie séparée.

► Notons $\varphi:\ t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{t^4}{e^t + t^2}$.

Q13 Justifiez l'existence de la fonction $f:\ x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t)\,dt$.

Q14 Discutez le signe de $f(x)$ en fonction de x.

Q15 Prouvez que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Q16 Explicitez $f'(x)$.

Q17 Déterminez le $DL_6(0)$ de f.

Tournez S.V.P.

Partie 3

► Cette partie utilise certains des résultats établis auparavant. Elle doit **IMPÉRATIVEMENT** être rédigée sur une copie séparée.

$\boxed{\text{Q18}}$ Pour $a \geqslant 0$, justifiez l'encadrement $1 - a \leqslant \dfrac{1}{1+a} \leqslant 1$.

$\boxed{\text{Q19}}$ Utilisez l'encadrement précédent pour donner un équivalent *simple* de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

$\boxed{\text{Q20}}$ Soient P une fonction polynôme, de degré n, de coefficient dominant α, et λ un réel non nul. Déterminez le degré et le coefficient dominant de la fonction polynôme Q définie par $\dfrac{d}{dx}\big(P(x)e^{\lambda x}\big) = Q(x)e^{\lambda x}$.

$\boxed{\text{Q21}}$ Calculez $K(x) = \displaystyle\int_x^{2x} t^4 e^{-t}\, dt$. **Les IPP éventuelles devront être justifiées avec soin.**

$\boxed{\text{Q22}}$ Utilisez le résultat précédent et une majoration *très simple* pour obtenir la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

$\boxed{\text{Q23}}$ Étudiez le signe de $f'(x)$.

$\boxed{\text{Q24}}$ Dressez le tableau des variations de f.

$\boxed{\text{Q25}}$ Donnez l'allure de la courbe représentative de f.

$\boxed{\text{Q26}}$ Améliorez le résultat de la question 22, en calculant un équivalent *simple* de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.