Sup PCSI2 — Contrôle 2000/02

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 : techniques de calcul

► Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

Q1 Calculez la limite ℓ de la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+k}}$.

Q2 Calculez l'intégrale $J = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{\arcsin^2(t/2)}{\sqrt{4-t^2}}\, dt$.

Q3 Proposez un script Maple pour calculer ℓ et J.

Q4 Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + 2(3-2i)z^2 + (8-15i)z + 3 - 11i = 0$ sachant qu'elle possède une solution réelle. (Bac C Besançon 1977)

Exercice 2 : une suite de réels

► Pour $n \geqslant 1$, nous noterons a_n la n-ième décimale de $\sqrt{2}$, et $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} 2^{-k} a_k$. Vous pourrez utiliser l'encadrement suivant de $\sqrt{2}$:

$$1.41421356237309504880 < \sqrt{2} < 1.41421356237309504881$$

Ainsi, $a_1 = 4$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4$ et $S_3 = 11/4$.

Q1 Calculez S_4 et S_5. Vous donnerez les résultats sous forme de fractions irréductibles !

Q2 Montrez que la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante.

Q3 La suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ est-elle strictement croissante ?

Q4 Justifiez la majoration $S_n < 9$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q5 Prouvez la convergence de la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$. Nous noterons désormais ℓ sa limite.

► **Attention** : on ne demande pas de calculer ℓ…

Q6 En procédant comme à la question 4, établissez la majoration $S_n < 55/16$.

Q7 Calculez S_8.

Q8 Déduisez des deux résultats précédents la valeur de $\lfloor \ell \rfloor$.

Q9 Montrez que a_n est le chiffre des unités de $\left\lfloor \sqrt{2 \cdot 10^{2n}} \right\rfloor$.

Q10 Proposez un script Maple comportant deux fonctions : l'une pour calculer a_n, l'autre pour calculer S_n.

Tournez S.V.P.

Exercice 3 : combinatoire

- On se propose de répondre à la question suivantes : de combien de façons peut-on choisir quatre maisons dans une rangée de douze, si l'on s'interdit de prendre deux maisons contiguës ?
- Soient n et k deux naturels non nuls. On note $F(n,k)$ le nombre de façons de choisir k maisons dans une rangée de n, de telle manière que deux maisons ne soient pas contiguës.
- Pour faciliter certaines explications, on pourra supposer que les maisons sont numérotées consécutivement de 1 à n.

$\boxed{\text{Q1}}$ Combien vaut $F(n,1)$?

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que $F(n,k) = 0$ si $n < 2k-1$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Combien vaut $F(2k-1,k)$?

$\boxed{\text{Q4}}$ Démontrez la relation $F(n+2,k+1) = F(n,k) + F(n+1,k+1)$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Dressez un tableau donnant la valeur de $F(n,k)$ pour $1 \leqslant n \leqslant 12$ et $1 \leqslant k \leqslant 4$. On utilisera k comme indice de ligne.

$\boxed{\text{Q6}}$ Quelle est la réponse à la question posée initialement ?

$\boxed{\text{Q7}}$ Donnez une expression simple de $F(n,2)$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Donnez une expression simple de $F(n,3)$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Soit $n \geqslant 2$. Établissez la relation $F(n+1,k+1) = \displaystyle\sum_{i=2k-1}^{n-1} F(i,k)$, pour tout k vérifiant $0 < 2k \leqslant n$.

- On se propose de donner une expression *très simple* de $F(n,k)$ lorsque $n \geqslant 2k-1$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Montrez que $F(n,1)$ est égal à un coefficient binomial dépendant de n. Établissez un résultat analogue pour $F(n,2)$ et $F(n,3)$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Au vu des résultats que vous venez d'établir, quelle formule conjecturez-vous pour $F(n,k)$?

$\boxed{\text{Q12}}$ Démontrez cette formule !