$\boxed{\text{Sup PCSI2 — Contrôle 1997/05}}$

► Notons $\lceil x \rceil$ le plus petit relatif supérieur ou égal au réel x ; nous avons donc $\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$ et $\lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil$. La partie entière de x est notée $\lfloor x \rfloor$ comme il est d'usage.

Partie I

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \lceil x \rceil$ est croissante.

$\boxed{\text{Q2}}$ Justifiez : $\lceil x \rceil < \lceil y \rceil \Rightarrow x < y$.

$\boxed{\text{Q3}}$ La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \lceil x \rceil$ est-elle strictement croissante ?

$\boxed{\text{Q4}}$ Pour $x \in \mathbb{R}$, justifiez la relation $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, établissez $\lceil \alpha n \rceil + \lfloor (1-\alpha)n \rfloor = n$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Justifiez : $2 \leqslant \left\lceil \dfrac{2n}{3} \right\rceil < n$ dès que le naturel n est au moins égal à 3.

$\boxed{\text{Q7}}$ Soient a et b deux naturels non nuls, et x un réel ; établissez $\left\lceil \dfrac{\lceil x/a \rceil}{b} \right\rceil = \left\lceil \dfrac{x}{ab} \right\rceil$.

Partie II

► Nous nous intéressons à une suite $(C_n)_{n \geqslant 2}$ vérifiant $C_2 = 1$ et $C_n = 3C_{\lceil 2n/3 \rceil}$ pour $n \geqslant 3$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Montrez que ces relations définissent *effectivement* une suite de naturels.

$\boxed{\text{Q9}}$ Rédigez une fonction Maple qui calcule C_n en fonction de n.

$\boxed{\text{Q10}}$ Calculez C_n pour $n \in [\![3, 12]\!]$; vous présenterez les résultats dans un tableau résumant, de façon concise mais explicite, les calculs (lesquels ne devront pas figurer sur votre copie).

$\boxed{\text{Q11}}$ Montrez que C_{n+1} est égal, soit à C_n, soit à $3C_n$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Quel est le sens de variation de la suite $(C_n)_{n \geqslant 2}$?

Partie III

► Notons $\mathcal{P}(n)$ l'assertion suivante :

« Pour $2n \leqslant k < 3n$, on a $C_k \geqslant k^2$ »

$\boxed{\text{Q13}}$ Soit $n \geqslant 3$; montrez que, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.

$\boxed{\text{Q14}}$ Exhibez un indice n tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie.

$\boxed{\text{Q15}}$ Montrez que $C_n \geqslant n^2$ dès que n est au moins égal à un indice n_1 que vous déterminerez. Quelle conclusion pouvez-vous en tirer, concernant le comportement de la suite $(C_n)_{n \geqslant 2}$?

$\boxed{\text{Q16}}$ Montrez qu'il existe une infinité d'indices n tels que $C_{n+1} = 3C_n$.

$\boxed{\text{Q17}}$ Comparez C_{3k+2} et C_{3k+3}.

$\boxed{\text{Q18}}$ Existe-t-il un exposant β tel que $C_n \underset{n \to \infty}{\sim} n^\beta$?

Tournez S.V.P.

Partie IV

► Notons $\beta = \dfrac{\ln 3}{\ln \frac{3}{2}}$.

$\boxed{\text{Q19}}$ Justifiez (sans recours à une calculatrice) l'encadrement $2 < \beta < 3$.

$\boxed{\text{Q20}}$ Combien vaut $3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\beta}$?

$\boxed{\text{Q21}}$ Notons $f : n \geqslant 2 \mapsto \left(\dfrac{n}{2}\right)^{\beta}$. Montrez que $C_n \geqslant f(n)$ pour tout $n \geqslant 2$.

$\boxed{\text{Q22}}$ Notons $g : n \geqslant 4 \mapsto 9(n-3)^{\beta}$. Montrez que $C_n \leqslant g(n)$ pour tout $n \geqslant 4$.

$\boxed{\text{Q23}}$ Quelle(s) relation(s) pouvez-vous alors écrire entre les suites $(C_n)_{n\geqslant 2}$ et $(n^{\beta})_{n\geqslant 2}$?

Partie V

► Nous nous proposons de généraliser le résultat précédent. Soient $A > 1$ et $\alpha \in]0,1[$. Notons E l'ensemble des naturels n qui vérifient $n > \lceil n\alpha \rceil$.

$\boxed{\text{Q24}}$ Montrez que E n'est pas vide.

$\boxed{\text{Q25}}$ Explicitez, en fonction de α, le plus petit élément n_α de E.

$\boxed{\text{Q26}}$ Montrez que $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant n_\alpha\}$.

► Nous nous intéressons désormais aux suites $(D_n)_{n\geqslant 1}$ qui vérifient la relation de récurrence $D_n = AD_{\lceil n\alpha \rceil}$ pour tout $n \geqslant n_\alpha$.

$\boxed{\text{Q27}}$ L'ensemble $\mathcal{D}$ de ces suites peut-il être muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

► Dans la suite, $(D_n)_{n\geqslant 1}$ désigne un élément de $\mathcal{D}$.

$\boxed{\text{Q28}}$ Montrez que, si l'on connaît les termes d'indice compris entre 1 (inclus) et n_α (exclu), on peut calculer tous les termes de cette suite.

$\boxed{\text{Q29}}$ Supposons qu'il existe des réels k et β strictement positifs tels que $D_n \underset{n\to\infty}{\sim} kn^{\beta}$. Quelle doit être la valeur de β ?

► Dans la suite, β désigne le réel que vous venez de déterminer. Supposons $D_n > 0$ pour tout n compris entre 1 (inclus) et n_α (exclu).

$\boxed{\text{Q30}}$ Déterminez un réel $K > 0$ tel que $D_n \geqslant Kn^{\beta}$ pour tout $n \geqslant 1$.

$\boxed{\text{Q31}}$ Déterminez de même des réels $M > 0$ et $\lambda > 0$ tels que $D_n \leqslant M(n-\lambda)^{\beta}$ pour tout $n \geqslant n_\alpha$.

$\boxed{\text{Q32}}$ Quelle(s) relation(s) pouvez-vous alors écrire entre les suites $(D_n)_{n\geqslant 2}$ et $(n^{\beta})_{n\geqslant 2}$?

$\boxed{\text{Q33}}$ Il existe en informatique une structure de donnée appelée $2d$-arbre. Voici un exemple de situation où cette structure peut être utilisée : une carte géographique étant présentée sur un écran d'ordinateur, on utilise le *rectangle de sélection* pour délimiter une zone ; on veut déterminer rapidement combien de villes sont situées dans ce rectangle.

Lorsque l'on veut évaluer le coût d'une recherche dans un tel arbre répertoriant n points, on est amené à étudier une suite $(Q_n)_{n\geqslant 1}$ définie par les relations $Q_1 = 1$ et $Q_n = 2 + 2Q_{\lceil n/4 \rceil}$ pour $n \geqslant 2$. Quelle estimation asymptotique de Q_n pouvez-vous donner ?