$\boxed{\text{HX4 — Contrôle 1992/12}}$

Problème 1

▶ $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique et de l'orientation standard. Ainsi, la base canonique $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est orthonormée et directe.

▶ Soit $\overrightarrow{n} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ un vecteur unitaire. Notons $\mathcal{D}$ la droite engendrée par $\overrightarrow{n}$ et $\mathcal{P}$ le plan orthogonal à $\mathcal{D}$.

▶ Notons p la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$; q la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$; r la transformation qui, à $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$, associe $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{v}$; et $\mathrm{f} = \mathrm{p} + \mathrm{r}$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que $\mathrm{p}(\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$ pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Déterminez les matrices respectives de p et q dans la base $\mathcal{B}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez que r est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Déterminez le noyau et l'image de r.

$\boxed{\text{Q5}}$ Déterminez la matrice de r dans la base $\mathcal{B}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Vérifiez que $\mathrm{r} \circ \mathrm{q} = \mathrm{r}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Comparez les normes des vecteurs $\mathrm{r}(\overrightarrow{v})$ et $\mathrm{q}(\overrightarrow{v})$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Les vecteurs $\mathrm{r}(\overrightarrow{v})$ et $\mathrm{q}(\overrightarrow{v})$ appartiennent tous les deux au plan $\mathcal{P}$. Celui-ci étant muni de l'orientation induite par $\overrightarrow{n}$, déterminez l'angle de ces vecteurs.

$\boxed{\text{Q9}}$ Montrez que $\mathrm{r} \circ \mathrm{r} = -\,\mathrm{q}$.

$\boxed{\text{Q10}}$ En déduire l'égalité $\overrightarrow{n} \wedge (\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v})\overrightarrow{n} - \overrightarrow{v}$ pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Montrez que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Déterminez le noyau de f. Qu'en déduisez-vous ?

$\boxed{\text{Q13}}$ Déterminez la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

$\boxed{\text{Q14}}$ Montrez que f est un endomorphisme orthogonal.

$\boxed{\text{Q15}}$ Calculez $\mathrm{f}(\overrightarrow{n})$.

$\boxed{\text{Q16}}$ Précisez la restriction de f à $\mathcal{P}$; en déduire la nature et les éléments géométriques de f.

▶ Notons $\delta = \mathrm{f} \circ \mathrm{f}$.

$\boxed{\text{Q17}}$ Pour $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$, explicitez $\delta(\overrightarrow{v})$ en fonction de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{n}$.

$\boxed{\text{Q18}}$ En déduire la matrice de δ dans la base $\mathcal{B}$. Précisez la nature et les éléments géométriques de δ.

Problème 2

$\boxed{\text{Q1}}$ Étude et construction de la courbe définie par le paramétrage

$$x(t) = \frac{t^2}{(1-t^2)(1-2t)} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{t^3}{(1-t^3)(1-2t)}$$

On ne vous demande pas l'étude de la convexité.

Tournez S.V.P.

Problème 3

- E est un espace vectoriel réel muni d'une norme notée $\|.\|$; E^* désigne le dual de E. Une forme linéaire φ sur E est *continue* en $x \in E$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \alpha > 0 : \forall y \in E : \|y - x\| < \alpha \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

- On dira que $\varphi \in E^*$ est *continue* sur E si elle continue en tout $x \in E$.

Q1 Montrez que $\varphi \in E^*$ est continue sur E ssi elle continue en $\overrightarrow{0}$.

- E' désigne l'ensemble des formes linéaires continues sur E. Clairement , E' est un s.e.v. de E^* ; on admettra qu'il ne se réduit pas à la forme nulle.

Q2 Soit φ un élément de E^* ; établir :

$$\varphi \in E' \iff \exists A > 0 : \forall x \in E : |\varphi(x)| \leqslant A\|x\|$$

Q3 En déduire l'existence, pour $\varphi \in E'$, du réel $N(\varphi) = \sup\big\{|\varphi(x)|, x \in E \text{ et } \|x\| = 1\big\}$.

Q4 Montrez que l'application $N : \varphi \in E' \mapsto N(\varphi) \in \mathbb{R}$ est une norme sur E'.

Q5 Pour $\varphi \in E'$ et $x \in E$, établir $|\varphi(x)| \leqslant N(\varphi)\|x\|$.

- On suppose désormais que E est de dimension finie n. On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, et on note $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$. On rappelle que $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ pour tous i et j dans $[\![1,n]\!]$.

Q6 Montrez que $E' = E^*$.

Q7 Soit $\varphi \in E^*$; on note $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ les composantes de φ dans la base $\mathcal{B}^*$. Déterminez $N(\varphi)$ en fonction de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ lorsque $\|.\|$ est l'un des trois normes suivantes :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$$

où $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$.