Sup PCSI 2 — Exercices : produit vectoriel, produit mixte

$\boxed{\text{Q1}}$ Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et A sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On suppose A antisymétrique ; montrez qu'il existe un et un seul vecteur $a \in E$ tel que $f(x) = a \wedge x$ pour tout $x \in E$. Nous dirons que a est *associé* à A. Soient A et B deux matrices carrées d'ordre 3, antisymétriques, et a, b leurs vecteurs associés. Vérifiez que $AB - BA$ est antisymétrique, et déterminez son vecteur associé.

$\boxed{\text{Q2}}$ Soit $a \in \mathbb{R}^3$. Étudiez l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x) = a \wedge (a \wedge x)$. Source : TPE 1992.

$\boxed{\text{Q3}}$ u est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. Étudiez la fonction $f : x \mapsto x + (x \cdot u)u + \sqrt{3}(x \wedge u)$. Source : POX (RMS 1989.5.24)

$\boxed{\text{Q4}}$ Soient u, v et w trois vecteur de $\mathbb{R}^3$. Établissez la *formule du double produit vectoriel* :

$$(u \wedge v) \wedge w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$$

Vous pourrez proposer plusieurs méthodes.

$\boxed{\text{Q5}}$ Utilisez la formule du double produit vectoriel pour simplifier $(a\wedge b)\wedge(c\wedge d)$. Constatez que deux expressions sont possibles, et déduisez-en une preuve de l'affirmation suivante : « quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont toujours liés ».

$\boxed{\text{Q6}}$ Soient a, b, c et d quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Établissez la formule :

$$(a \wedge b) \cdot (c \wedge d) = \begin{vmatrix} a \cdot c & b \cdot c \\ a \cdot d & b \cdot d \end{vmatrix}$$

$\boxed{\text{Q7}}$ Soient A, B, C et D quatre points du plan ou de l'espace. Montrez la formule

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$$

Donnez une interprétation géométrique de cette relation, dans le cas du plan, puis dans le cas de l'espace.

$\boxed{\text{Q8}}$ Soient A, B, C et D quatre points de l'espace. Montrez la formule

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BD}}$$

$\boxed{\text{Q9}}$ Soient a, b et c trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Donnez des expression simples des quantités suivantes :

$$\begin{aligned}
q_1 &= \mathrm{m}\,(a+b, b+c, c+a) \\
q_2 &= \mathrm{m}\,(a\wedge b, b\wedge c, c\wedge a) \\
q_3 &= \mathrm{m}\,((a+b)\wedge(a+c), (b+c)\wedge(b+a), (c+a)\wedge(c+b)) \\
q_4 &= \mathrm{m}\,((a\wedge b)\wedge(a\wedge c), (b\wedge c)\wedge(b\wedge a), (c\wedge a)\wedge(c\wedge b)) \\
q_5 &= \mathrm{m}\,((a\wedge b)+(a\wedge c), (b\wedge c)+(b\wedge a), (c\wedge a)+(c\wedge b))
\end{aligned}$$

Petit problème (Aleph TCE, Géométrie II, 6.14)

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit f une rotation de $\mathbb{R}^3$; montrez que $f(u) \wedge f(v) = u \wedge v$ quels que soient u et v.

$\boxed{\text{Q2}}$ Que se passe-t-il si $f \in GO(\mathbb{R}^3) - SO(\mathbb{R}^3)$?

► Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ distinct de $\mathbf{0}$ et vérifiant $g(u) \wedge g(v) = u \wedge v$ quels que soient u et v. Soit (i, j, k) une b.o.n.d. de $\mathbb{R}^3$

$\boxed{\text{Q3}}$ Que pouvez-vous dire de la famille $\big(g(i), g(j), g(k)\big)$?

$\boxed{\text{Q4}}$ Conclusion concernant g ?