$\boxed{\text{Un exercice de calcul avec des produits vectoriels et des produits mixtes}}$

Énoncé

• On rappelle la relation $\mathrm{m}\,(u,v,w) = (u \wedge v)\cdot w$ définissant le produit vectoriel, ainsi que la formule du double produit vectoriel $(u \wedge v) \wedge w = (u\cdot w)v - (v \cdot w)u$.

• Soient a, b et c trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Donnez des expression simples des quantités suivantes :
- $q_1 = \mathrm{m}\,(a+b, b+c, c+a)$;
- $q_2 = \mathrm{m}\,(a\wedge b, b\wedge c, c\wedge a)$;
- $q_3 = \mathrm{m}\,((a+b)\wedge(a+c), (b+c)\wedge(b+a), (c+a)\wedge(c+b))$;
- $q_4 = \mathrm{m}\,((a\wedge b)\wedge(a\wedge c), (b\wedge c)\wedge(b\wedge a), (c\wedge a)\wedge(c\wedge b))$;
- $q_5 = \mathrm{m}\,((a\wedge b)+(a\wedge c), (b\wedge c)+(b\wedge a), (c\wedge a)+(c\wedge b))$.

Solution

$\boxed{q1}$ • Par multilinéarité, nous obtenons :

$$q_1 = \mathrm{m}\,(a,b,c) + \mathrm{m}\,(a,b,a) + \mathrm{m}\,(a,c,c) + \mathrm{m}\,(a,c,a) + \mathrm{m}\,(b,b,c) + \mathrm{m}\,(b,b,a) + \mathrm{m}\,(b,c,c) + \mathrm{m}\,(b,c,a)$$

Dans le membre de droite, six termes disparaissent par alternance. Il reste $q_1 = \mathrm{m}\,(a,b,c) + \mathrm{m}\,(b,c,a)$, soit $\boxed{q_1 = 2\,\mathrm{m}\,(a,b,c)}$.

• Autre méthode : on ne change pas le produit mixte en ajoutant à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres.

$$\begin{aligned} q_1 &= \mathrm{m}\,(2(a+b+c), b+c, c+a) = 2\,\mathrm{m}\,(a+b+c, b+c, c+a) = 2\,\mathrm{m}\,(a+b+c, -a, -b) \\ &= 2\,\mathrm{m}\,(a+b+c, a, b) = 2\,\mathrm{m}\,(a,b,c) \end{aligned}$$

$\boxed{q2}$ • Par définition, $q_2 = \big((a\wedge b)\wedge(b\wedge c)\big)\cdot(c\wedge a)$. Appliquons la formule du double produit vectoriel avec $u=a$, $v=b$ et $w = b\wedge c$; il vient :

$$\begin{aligned} (a\wedge b)\wedge(b\wedge c) = (u\wedge v)\wedge w = (u\cdot w)v - (v\cdot w)u &= \big(a\cdot(b\wedge c)\big)b - \big(b\cdot(b\wedge c)\big)a \\ &= \mathrm{m}\,(a,b,c)\,b - \mathrm{m}\,(b,b,c)\,a = \mathrm{m}\,(a,b,c)\,b \end{aligned}$$

Reportons ce résultat : $q_2 = \mathrm{m}\,(a,b,c)\,b\cdot(c\wedge a) = \mathrm{m}\,(a,b,c)\,\mathrm{m}\,(b,c,a) = \boxed{\big(\mathrm{m}\,(a,b,c)\big)^2}$.

$\boxed{q3}$ • Notons $u = a+b$, $v = b+c$ et $w = c+a$ et utilisons l'alternance du produit mixte :

$$\begin{aligned} q_3 &= \mathrm{m}\,(u\wedge w, v\wedge u, w\wedge v) = \mathrm{m}\,(-(w\wedge u), -(u\wedge v), -(v\wedge w)) \\ &= -\,\mathrm{m}\,(w\wedge u, u\wedge v, v\wedge w) = -\,\mathrm{m}\,(u\wedge v, v\wedge w, w\wedge u) \end{aligned}$$

Avec le résultat de la question précédente, $q_3 = -\big(\mathrm{m}\,(u,v,w)\big)^2 = -\big(\mathrm{m}\,(a+b,b+c,c+a)\big)^2$. Avec l'expression de q_1, il vient $\boxed{q_3 = -4\big(\mathrm{m}\,(a,b,c)\big)^2}$.

$\boxed{q4}$ • Notons $u = a\wedge b$, $v = b\wedge c$ et $w = c\wedge a$. En utilisant l'antisymétrie du produit vectoriel et l'expression de q_2, nous obtenons :

$$q_4 = \mathrm{m}\,(u\wedge(-w), v\wedge(-u), w\wedge(-v)) = \mathrm{m}\,(w\wedge u, u\wedge v, v\wedge w) = \mathrm{m}\,(w,u,v)^2 = \mathrm{m}\,(u,v,w)^2$$

En utilisant une deuxième fois l'expression de q_2, il vient $\boxed{q_4 = \big(\mathrm{m}\,(a,b,c)\big)^4}$.

• Autre méthode : la formule du double produit vectoriel donne $(a\wedge b)\wedge(a\wedge c) = \big(a\cdot(a\wedge c)\big)b - \big(b\cdot(a\wedge c)\big)a = \mathrm{m}\,(a,b,c)\,a$; par raison de symétrie, $(b\wedge c)\wedge(b\wedge a) = \mathrm{m}\,(b,c,a)\,b = \mathrm{m}\,(a,b,c)\,b$ et $(c\wedge a)\wedge(c\wedge b)) = \mathrm{m}\,(c,a,b)\,c = \mathrm{m}\,(a,b,c)\,c$. Par trilinéarité, nous obtenons $q_4 = \big(\mathrm{m}\,(a,b,c)\big)^3\,\mathrm{m}\,(a,b,c)\ldots$

$\boxed{q5}$ • Notons $u = a\wedge b$, $v = b\wedge c$ et $w = c\wedge a$. En utilisant l'antisymétrie du produit vectoriel, nous obtenons $q_5 = \mathrm{m}\,(u-w, v-u, w-v)$; mais les vecteurs $u-w$, $v-u$ et $w-v$ sont liés (leur somme est nulle). Donc $q_5 = 0$.

• Autre méthode : ajoutons $a\wedge a$ au premier facteur, $b\wedge b$ au deuxième et $c\wedge c$ au troisième. Il vient $q_5 = \mathrm{m}\,(a\wedge(a+b+c), b\wedge(a+b+c), c\wedge(a+b+c))$. Si $a+b+c = \overrightarrow{0}$, alors $q_5 = 0$ banalement ; sinon, les trois vecteurs qui interviennent dans le produit mixte sont dans le plan orthogonal à $a+b+c$, donc sont liés si bien que $q_5 = 0$.