TD : géométrie

- Le plan euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathbf{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. R est un réel strictement positif. $\mathcal{C}$ désigne le cercle de centre $\mathbf{O}$ et de rayon R. $\mathbf{A}$ est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse R, et $\mathbf{B}$ celui d'ordonnée R. $\mathcal{D}$ est la tangente à $\mathcal{C}$ en B.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. M est le point de $\mathcal{D}$ d'abscisse λR, T le point de contact avec $\mathcal{C}$ de la tangente menée de $\mathbf{M}$ et distincte de $\mathcal{D}$. Γ est le cercle tangent en $\mathbf{M}$ à $\mathcal{D}$ et passant par $\mathbf{T}$; Ω est le centre de Γ. $\mathbf{Q}$ est le point de Γ diamétralement opposé à $\mathbf{M}$. $\mathbf{I}$ est le milieu du segment $\mathbf{OM}$, et $\mathbf{H}$ le projeté orthogonal de $\mathbf{O}$ sur la droite $\mathbf{MQ}$.

Q1 Construisez une figure très soignée, présentant tous ces éléments, et respectant impérativement les consignes suivantes : la feuille de papier est orientée à l'italienne ; $R = 4$; l'unité est égale à 1 cm ; l'axe des abscisses est placé au milieu de la feuille ; $\lambda = \sqrt{2}$.

Q2 Expliquez la construction (à la règle et au compas) des points $\mathbf{M}$ (pour $\lambda = \sqrt{2}$) et $\mathbf{T}$ (pour λ quelconque).

- Dans la suite, et sauf mention explicite du contraire, λ est un élément quelconque de $\mathbb{R}^*$. On note φ l'angle $\left(\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{\mathbf{OM}}\right)$.

Q3 Exprimez λ en fonction de φ.

Q4 Chaque année, les étudiants auxquels ce T.D. est proposé se trompent dans le calcul de la question précédente. Vérifiez donc ce que vous venez de faire…

Q5 Calculez les coordonnées de $\mathbf{T}$ en fonction de R et de φ, puis en fonction de R et de λ.

Q6 En déduire les coordonnées de Ω en fonction de R et de λ.

Q7 Prouvez que les points $\mathbf{O}$, $\mathbf{T}$ et $\mathbf{Q}$ sont alignés, et que le point $\mathbf{I}$ appartient au cercle Γ.

Q8 Que pouvez-vous dire de la droite $\mathbf{I}\Omega$? et des trois droites $\mathbf{OH}$, $\mathbf{MT}$ et $\mathbf{QI}$?

Q9 On note $\mathcal{P}^*$ le lieu de Ω lorsque λ décrit $\mathbb{R}^*$. Quelle(s) symétrie(s) présente $\mathcal{P}^*$?

Q10 Prouvez que $\mathcal{P}^*$ est une partie (que vous préciserez) d'une parabole $\mathcal{P}$. Précisez le sommet $\mathbf{S}$, le paramètre p, le foyer $\mathbf{F}$ et la directrice Δ de $\mathcal{P}$. Placez $\mathbf{S}$, $\mathbf{F}$ et Δ sur la figure.

Q11 Construisez le point Ω' de $\mathcal{P}^*$ associé à $\lambda = 1$.

Q12 Construisez le point Ω'' de $\mathcal{P}^*$ d'abscisse positive, et situé à l'une des extrémités du diamètre focal. Vous déterminerez d'abord la valeur de λ correspondante.

Q13 Quelles sont les valeurs de λ associées aux points où $\mathcal{P}^*$ recoupe l'axe des abscisses ? Tracez soigneusement $\mathcal{P}$ sur la figure.

Q14 Sur la figure, les points $\mathbf{S}$, $\mathbf{I}$ et Ω semblent alignés. Qu'en pensez-vous ?