► Voici deux problèmes corrigés de géométrie euclidienne.

---

► **Objectif** : vous devez déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale $s$, dont la direction $\mathcal{D}$ est définie par le point $A(1,0,2)$ et le vecteur $\vec{u} = (1,1,-3)$. Source : ALEPH ? ? ?

Q1 Des équations cartésiennes de $\mathcal{D}$ sont : $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-0}{1} = \dfrac{z-2}{-3}$.

Exprimons $x$ et $z$ en fonction de $y$ ; il vient $x = y+1$ et $z = -3y+2$ ; notons $\lambda = y$ : alors $x = \lambda + 1$, $y = \lambda$ et $z = -3\lambda + 2$.

Déterminons le projeté orthogonal $H$ de $M(x,y,z)$ sur $\mathcal{D}$ ; ceci revient à déterminer $\lambda$ tel que le point $H = A+\lambda\vec{u}$ vérifie $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u} = 0$ ; or :

$$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u} = 0 \iff \begin{pmatrix} x_H - x \\ y_H - y \\ z_H - z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \iff (x+\lambda)-(y-\lambda)-(z-\lambda)-2 = 0 \iff \lambda = \frac{-x+y+z+2}{3}$$

En reportant la valeur de $\lambda$, il vient :

$x_H = x + \lambda = x + \dfrac{-x+y+z+2}{3} = \dfrac{2x+y+z+2}{3}$ ;

$y_H = y + \lambda = y - \dfrac{-x+y+z+2}{3} = \dfrac{x+2y-z-2}{3}$ ; et

$z_H = z - \lambda = z - \dfrac{-x+y+z+2}{3} = \dfrac{x-y+2z-2}{3}$.

---

► On se place dans l'espace euclidien. La réflexion affine $s$ échange les points $A(1,1,1)$ et $B(3,-1,-1)$. Donnez l'expression analytique de $s$ et sa matrice. Source : Nathan.

Q2 Solution :

$s$ est la réflexion dont la base est le plan médiateur du segment $AB$

$M \in P \iff AM = BM \iff \ldots \iff x - y - z = 2$

Notons $H$ est le projeté orthogonal de $M$ sr $P$

$\vec{n} = (1,-1,-1)$ est normal à $P$

on détermine $\lambda$ tel qe $M + \lambda\vec{n}$ appartenne à $P$

il vient $\lambda = \dfrac{2(-x+y+z+2)}{3}$

$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$

$x' = (x+2y+2z+4)/3$, $y' = (2x+y-2z-4)/3$, $z' = (2x-2y+z-4)/3$