► Voici deux problèmes corrigés de géométrie euclidienne.

► **Objectif** : vous devez déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale s, dont la direction $\mathcal{D}$ est définie par le point $A(1,0,2)$ et le vecteur $\vec{u}=(1,1,-3)$. Source : ALEPH ? ? ?

Q1 Des équations cartésiennes de $\mathcal{D}$ sont : $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-0}{1}=\dfrac{z-2}{-3}$.

Exprimons x et z en fonction de y ; il vient $x=y+1$ et $z=-3y+2$; notons $\lambda=y$: alors $x=\lambda+1$, $y=\lambda$ et $z=-3\lambda+2$.

Déterminons le projeté orthogonal H de $M(x,y,z)$ sur $\mathcal{D}$; ceci revient à déterminer λ tel que le point $H=A+\lambda\vec{u}$ vérifie $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$; or :

$$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0 \iff \begin{pmatrix} x_H-x\\ y_H-y\\ z_H-z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}=0 \iff (x+\lambda)-(y-\lambda)-(z-\lambda)-2=0 \iff \lambda=\frac{-x+y+z+2}{3}$$

En reportant la valeur de λ, il vient :

$x_H=x+\lambda=x+\dfrac{-x+y+z+2}{3}=\dfrac{2x+y+z+2}{3}$;

$y_H=y+\lambda=y-\dfrac{-x+y+z+2}{3}=\dfrac{x+2y-z-2}{3}$; et

$z_H=z-\lambda=z-\dfrac{-x+y+z+2}{3}=\dfrac{x-y+2z-2}{3}$.

► On se place dans l'espace euclidien. La réflexion affine s échange les points $A(1,1,1)$ et $B(3,-1,-1)$. Donnez l'expression analytique de s et sa matrice. Source : Nathan.

Q2 Solution :

s est la réflexion dont la base est le plan médiateur du segment AB

$M\in P \iff AM=BM \iff \ldots \iff x-y-z=2$

Notons H est le projeté orthogonal de M sr P

$\vec{n}=(1,-1,-1)$ est normal à P

on détermine λ tel qe $M+\lambda\vec{n}$ appartenne à P

il vient $\lambda=\dfrac{2(-x+y+z+2)}{3}$

$\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MH}$

$x'=(x+2y+2z+4)/3$, $y'=(2x+y-2z-4)/3$, $z'=(2x-2y+z-4)/3$