▶ Voici quelques exercices corrigés de géométrie euclidienne.

▶ **Objectif** : soient $A(-1,2,1)$, $\vec{u}=(1,1,-1)$ et $B(2,1,-3)$. Notons $\mathcal{D}=A+\mathbb{R}\vec{u}$. Vous devez déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$, ainsi que la distance de B à $\mathcal{D}$. Source : *Précis Bréal PCSI*, page 381, Ex. 1.

Q1 Le point H est défini par $\overrightarrow{AH}=\dfrac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}=2\vec{u}$. Donc les coordonnées de H sont $(1,4,-1)$ et $d(B,\mathcal{D})=\dfrac{\vec{u}\wedge\overrightarrow{AH}}{\|\vec{u}\|^2}=\sqrt{14}$.

▶ **Objectif** : vous devez déterminer le(s) point(s) d'intersection de la droite $\mathcal{D}$, d'équations $x-z=3$ et $x+y-z=-2$, et de la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-3=0$ (si toutefois de tels points existent).

Q2 Il n'est pas inintéressant de déterminer le centre et le rayon de $\mathcal{S}$. Ceci revient à un changement d'origine : $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$. Donc le centre est $\Omega(1,1,2)$ et le rayon est $R=3$.

Un représentation paramétrique de $\mathcal{D}$: $x=\lambda$, $y=1$ et $z=3+\lambda$.

Alors $M(x,y,z)\in\mathcal{S}\cap\mathcal{D} \iff \exists\lambda\in\mathbb{R} : \begin{cases} x=\lambda,\ y=1,\ z=\lambda+3 \\ x^2+y^2+x^2-2x-2y-4z-3=0 \end{cases}$

Ceci se ramène à l'existence d'un réel λ tel que $x=\lambda$, $y=1$, $z=\lambda+3$ et (en remplaçant dans la dernière équation) :

$$\lambda^2+1+\lambda^2+6\lambda+9-2\lambda-2-4\lambda-12-3=0$$

Cette dernière équation se réduit à $2\lambda^2-5=0$; elle possède deux solutions réelles distinctes, donc la droite coupe la sphère en deux points distincts, obtenus pour $\lambda=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ et $\lambda=-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

▶ **Objectif** : vous devez déterminer la nature et les éléments géométriques de la transformation f de $\mathbb{R}^3$ définie par sa matrice $A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}$. Source : Lemaire, 48 exercices

Q3 A est orthogonale et symétrique, donc f est un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$. $\det(M)=-1$, donc f est une « antirotation », c'est-à-dire la composée commutative d'une rotation et d'une réflexion dans le plan est orthogonal à l'axe de la rotation.

Pour déterminer l'axe de la rotation, nous résolvons l'équation $3A\times X=-3X$, soit $\begin{cases}-2x-2y-z=-3x \\ 2x-y-2z=-3y \\ -x+2y-2z=-3z\end{cases} \iff \begin{cases} x-2y-z=0 \\ 2x+2y-2z=0 \\ -x+2y+z=0\end{cases}$ Ce système se réduit aux deux équations $x-2y-z=0$ et $x+y-z=0$, soit $x=z$ et $y=0$. Un vecteur directeur de l'axe est $\vec{u}=\dfrac{\vec{i}+\vec{k}}{\sqrt{2}}$.

$\mathrm{tr}(A)=5/3$, mais $\mathrm{tr}(A)=1+2\cos(\vartheta)$ donc $\cos(\vartheta)=\dfrac{1}{3}$