► Voici quelques exercices corrigés de géométrie euclidienne.

► **Objectif** : vous devez déterminer la nature et les éléments géométriques de la transformation h définie comme suit : l'image de $M(x,y,z)$ par h est le point $M'(x',y',z')$, où $x' = \frac{1}{9}(x-8y+4z)$, $y' = \frac{1}{9}(4x+4y+7z)$ et $z' = \frac{1}{9}(-8x+y+4z)$. Source : Sauser, page 231.

Q1 Observons que h est une isométrie vectorielle.

En résolvant le système $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$, nous montrons que l'ensemble des points fixes de h est la droite D d'équations $2x = -z$ et $y = z$.

f est une rotation d'axe $D = \mathbb{R}\vec{u}$, avec $\vec{u} = (1,-2,-2)$; il nous reste à calculer l'angle de cette rotation.

Déterminons une base orthogonale $(\vec{v},\vec{w})$ du plan vectoriel P orthogonal à $\vec{u}$, d'équation $x - 2y - 2z = 0$.

Prenons $\vec{v} = \vec{j} - \vec{k}$; $\vec{w}$ s'obtient avec un produit vectoriel : $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = 4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

$h(\vec{v}) = -\frac{1}{3}(4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = -\frac{1}{3}\vec{v}$.

Le plan P est muni de l'orientation induite par le vecteur $\vec{u}$; donc la base $(\vec{v},\vec{w})$ de P est directe, pour cette orientation.

Pour obtenir l'angle de la rotation, nous déterminons le signe de $m\big(\vec{u},\vec{v},h(\vec{v})\big) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -18$.

Concluons : h est une rotation d'axe $\mathbb{R}\vec{u}$ et d'angle $-\pi/2$.

► **Objectif** : vous devez déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale s par rapport au plan P d'équation $x + 2y - z + 2 = 0$.

Q2 Le vecteur $\vec{u} = (1,2,-1)$ est orthogonal à P, et dirige donc toute droite orthogonale à P.

La transformation s envoie $M(x,y,z)$ sur un point $M'(x',y',z')$ vérifiant deux conditions : M' appartient à la droite $M + \mathbb{R}\vec{u}$; et le milieu I du segment $[M,M']$ appartient au plan P.

La première propriété implique l'existence d'un réel t tel que $\overrightarrow{MM'} = t\vec{u}$; ce qui se traduit par les relations $x' = x + t$, $y' = y + 2t$ et $z' = z - t$.

Les coordonnées de I sont alors $x_I = x + t/2$, $y_I = y + t$ et $z_I = z - t/2$.

Comme I appartient à P, nous avons $x + t + 2 + 2(y+t) - (z - t/2) + 2 = 0$, soit $t = \frac{x + 2y - z + 2}{3}$.

Reportons cette valeur dans les relations définissant x', y' et z' ; il vient : $\begin{cases} x' = \dfrac{2x - 2y + z - 2}{3} \\ y' = \dfrac{-2x - y + 2z - 4}{3} \\ z' = \dfrac{x + 2y + 2z + 2}{3} \end{cases}$

Ce qui est l'expression analytique attendue.

► **Objectif** : vous devez montrer que l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini analytiquement comme suit : $\begin{cases} x' = \dfrac{-x + 2y + 2z}{3} \\ y' = \dfrac{2x - y + 2z}{3} \\ z' = \dfrac{2x + 2y - z}{3} \end{cases}$ est un demi-tour dont il faudra déterminer l'axe.

Q3 La matrice de g est $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Visiblement, A est symétrique et orthogonale (calculez la norme de chaque colonne, puis les produits scalaires des colonnes prises deux à deux) : donc g est une symétrie orthogonale non banale. La trace de A est égale à -1, donc g est un demi-tour : pour vous en convaincre, pensez à la matrice d'une réflexion, puis à celle d'un demi-tour dans une base bien choisie !

L'axe de g est l'ensemble des vecteurs invariants par l'automorphisme $\vec{g}$; nous résolvons ceci matriciellement : $A \times X = X \iff \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -4x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$

Après simplification, nous obtenons $x = y = z$. Donc l'axe du demi-tour est dirigé par le vecteur $(1,1,1)$.