Sup PCSI 2 — Exercices : géométrie euclidienne

**Triangles**

Q1 $ABC$ est un triangle isocèle, rectangle en $B$ ; on note $a = \|\overrightarrow{AB}\|$. Construisez l'ensemble $E_1$ des points $M$ vérifiant $2MA^2 - MB^2 + MC^2 = 3a^2$, puis l'ensemble $E_2$ des points $M$ vérifiant $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 3a^2$. (Bac Nice 1980)

Q2 Le cercle inscrit dans un triangle $(ABC)$ rectangle en $A$ touche l'hypothénuse en $K$. Montrez que l'aire du triangle est égale à $KB \cdot KC$.

Q3 Bac Aix 1981. $ABC$ est un triangle équilatéral. Construisez l'ensemble des points $M$ vérifiant $\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.

Q4 $(ABC)$ est un triangle équilatéral, déterminez l'ensemble des points $M$ tels que $MA = MB + MC$.

Q5 Soit $G$ le centre de gravité d'un triangle $ABC$ de côtés $a$, $b$ et $c$. Exprimez $GA^2 + GB^2 + GC^2$ en fonction de $a$, $b$ et $c$.

Q6 On donne un triangle $(ABC)$. Inscrivez dans ce triangle un carré $(PQRS)$, $P$ et $Q$ portés par $[AB]$, $R$ par $[BC]$ et $S$ par $[CA]$.

Q7 $ABC$ est un triangle quelconque : les triangles $BAB'$ et $CAC'$ sont isocèles, rectangles en $A$, extérieurement au triangle $ABC$. $M$ est le milieu du segment $[BC]$. Montrez que les droites $(AM)$ et $(B'C')$ sont orthogonales, et que $B'C' = 2AM$. Vous proposerez deux méthodes différentes, dont vous comparerez l'efficacité et l'élégance respective. (Bac C 1986)

Q8 Soient : $ABC$ un triangle ; $I$, $J$, $K$ les milieux respectifs des côtés $AB$, $BC$ et $CA$ ; $A'$, $B'$ et $C'$ les projetés orthogonaux de $A$ sur $BC$, $B$ sur $CA$ et $C$ sur $AB$. (i) montrez que les droites $AI$, $BJ$ et $CK$ sont concourantes en $G$. (ii) montrez que les droites $AA'$, $BB'$ et $CC'$ sont concourantes en un point $H$ ; (iii) montrez que les médiatrices des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ sont concourantes en un point $O$ ; (iv) montrez que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ (utilisez une homothétie) ; (v) montrez que les symétriques orthogonaux de $A$ par rapport à $BC$, $B$ par rapport à $CA$ et $C$ par rapport à $AB$ sont sur le cercle circonscrit à $ABC$.

Q9 $(ABC)$ est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle $(\Gamma)$. Soit $M$, distinct de $A$ et de $C$, situé sur celui des arcs $AC$ dont $B$ n'est pas élément. $I$ est le point du segment $[MB]$ vérifiant $MI = MA$. (i) montrez que le triangle $(IMA)$ est équilatéral. (ii) le plan est orienté de façon que le triangle $(ABC)$ soit direct ; déterminez les images respectives de $B$ et $I$ dans la rotation de centre $A$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ ; en déduire $MA + MC = MB$. (Bac Bordeaux 1982)

**En vrac**

Q10 Soient $O$ et $A$ deux points distincts. Déterminez l'ensemble des cercles qui passent par $A$, et qui sont vus de $O$ sous un angle droit (autrement dit : on peut mener, de $O$, deux tangentes à ce cercle, perpendiculaires l'une à l'autre).

Q11 Écrire des équations des droites issues de $A(2,1)$ et faisant un angle de $\dfrac{\pi}{4}$ avec la droite d'équation $3x + 2y = 5$.

Q12 On fixe deux droites $D$ et $\Delta$ du plan, et un réel $k > 0$. Déterminez l'ensemble des points $M$ du plan tels que $d(M,D) + d(M,\Delta) = k$. Même question, avec cette fois $d^2(M,D) + d^2(M,\Delta) = k$.

Q13 On repère les points d'un cercle de centre $O$ et de rayon $R$ par le paramètre $t = \tan\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)$ où $\varphi$ est l'angle polaire de $M$. Donnez une équation de la droite joignant les points de paramètres $t_1$ et $t_2$.

Q14 Déterminez une équation de la symétrique orthogonale de la droite $D$ d'équation $\cos(\alpha X) + \sin(\alpha Y) = p$ par rapport à la droite $\Delta$ d'équation $\cos(\beta X) + \sin(\beta Y) = q$.

Q15 $ABCD$ est un quadrilatère convexe ; extérieurement à ce quadrilatère, on construit le triangle $ABM_1$ isocèle rectangle en $M_1$, puis de même les triangles $BCM_2$, $CDM_3$ et $DAM_4$. Montrez que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M4]$ sont orthogonaux, et ont même longueur. (Bac E 1985)

Q16 Un observateur veut estimer la hauteur d'un phare, situé sur une île proche de la côte, mais inaccessible. Lorsqu'il est au bord de la plage, notre homme voit le phare sous un angle de 75° ; s'il recule de 100 mètres, il le voit sous un angle de 30°. Concluez.

Q17 Deux cercles $C$ et $\Gamma$ sont dits *orthogonaux* s'ils sont sécants et si les tangentes à $C$ et $\Gamma$ en chaque point d'intersection sont orthogonales. Prouvez que ceci revient à dire que les droites joignant les centres de $C$ et $\Gamma$ à l'un des points d'intersection sont orthogonales. Donnez une CNS liant les rayons de $C$ et $\Gamma$, et la distance de leurs centres, pour que $C$ et $\Gamma$ soient orthogonaux.

**Géométrie de l'espace**

$\boxed{\text{Q18}}$ $G$ est le centre de gravité d'un tétraèdre régulier $ABCD$. Calculez le sinus de l'angle des vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$.

$\boxed{\text{Q19}}$ $ABCDEFGH$ est un cube de côté $a$. (i) montrez que le plan $(BEG)$ est orthogonal à la droite $(DF)$ ; prouvez que leur point commun est le centre de gravité du triangle $BEG$. (ii) Soient $I$, $J$, $K$, $L$, $M$ et $N$ les milieux respectifs des segment $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$, $[EA]$ ; montrez que les six points $I$, $J$, $K$, $L$, $M$ et $N$ sont coplanaires, et sont les sommets d'un hexagone régulier ; exprimez en fonction de $a$ le volume de la pyramide régulière ayant pour sommet $F$ et pour base cet hexagone régulier.

$\boxed{\text{Q20}}$ $ABCD$ est un tétraèdre régulier. (i) $I$ est le milieu du segment $[AC]$ ; montrez que la droite $(AC)$ est orthogonale au plan $(DIB)$. (ii) $J$ est le milieu du segment $[BD]$, montrez que la droite $(IJ)$ est orthogonale aux droites $(AC)$ et $(BD)$. (iii) on note $K$ le milieu du segment $[DC]$, $L$ celui du segment $[AB]$, $Q$ celui du segment $[BC]$ et $H$ celui du segment $[AD]$ ; que pouvez-vous dire des segments $[HQ]$ et $[LQ]$ ? (Sujet 12 recueil APMEP 1981)

$\boxed{\text{Q21}}$ Déterminez la projection orthogonale de $(D)$ : $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$ sur $(P)$ : $x+2y+3z=0$.

$\boxed{\text{Q22}}$ Calculez la distance de $A(1,2,3)$ à la droite d'équation $(x+y-2z-1=0, x+y+z+1=0)$, puis à la droite d'équation $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{4}$.

$\boxed{\text{Q23}}$ Montrez que l'on peut choisir quatre des huit sommets d'un parallélépipède rectangle pour que les faces du tétraèdre ainsi défini soient toutes des triangles rectangles.

$\boxed{\text{Q24}}$ Déterminez $a$ pour que les symétriques orthogonaux de $M(1,1,a)$ par rapport aux quatre plans d'équations respectives $X+Y=1$, $Y+Z=1$, $Z+X=1$ et $X+3Y+Z=0$ soient coplanaires.

$\boxed{\text{Q25}}$ On fixe un plan $P$ et deux points $A$ et $B$ distincts et situés hors de $P$. Déterminez l'ensemble des points de contact avec $P$ des sphères passant par $A$ et $B$ et tangentes à $P$.

**2** : $x = BH$, $y = CK$, $\mathcal{A} = r(x+y+r)$, $2\mathcal{A} = (x+r)(y+r)$ ;