Sup PCSI 2 — Exercices : géométrie affine (2)

▶ Voici quelques exercices corrigés de géométrie affine.

▶ **Objectif** : vous devez déterminer la nature et les éléments géométriques de la transformation f définie comme suit : l'image de $M(x, y, z)$ par f est le point $M'(x', y', z')$, où $x' = -y - z - 1$, $y' = -2x - y - 2z + 2$ et $z' = x + y + 2z - 1$. Source : SAUSER, page 125.

Q1 Un calcul facile nous donne $\overrightarrow{MM'} = (1 - x - y - z)\,\vec{u}$, où $\vec{u} = (1, 2, -1)$.

L'ensemble P des points fixes de f est le plan d'équation $x + y + z = 1$.

La droite $M + \mathbb{R}\vec{u}$ coupe ce plan en un point M_1, de coordonnées $(x+k, y+2k, z-k)$. Déterminons k tel que ce point appartienne à P : cette condition s'écrit $x + k + y + 2k + z - k = 1$, ce qui nous donne $k = \dfrac{1-x-y-z}{2}$.

Nous avons donc $\overrightarrow{MM_1} = \dfrac{1}{2}(1 - x - y - z)\vec{u} = \dfrac{1}{2}\vec{u}$.

Nous en déduisons que M' est le symétrique de M par rapport à M_1.

Concluons : f est la symétrie dont la base est le plan d'équation $x + y + z = 1$ et la direction est $\mathbb{R}\vec{u}$.

▶ **Objectif** : vous devez déterminer la nature et les éléments géométriques de la transformation g définie comme suit : l'image de $M(x, y, z)$ par g est le point $M'(x', y', z')$, où $x' = \dfrac{3x+y+z-1}{2}$, $y' = \dfrac{x+2y+z-1}{2}$ et $z' = \dfrac{-x-y+z+1}{2}$. Source : SAUSER, page 126.

Q2 Un calcul facile nous donne $\overrightarrow{MM'} = \dfrac{x+y+z-1}{2}\,\vec{u}$ avec $\vec{u} = (1, 2, -1)$.

L'ensemble P des points fixes de f est le plan d'équation $x + y + z = 1$.

La droite $M + \mathbb{R}\vec{u}$ coupe le plan P en un point M_1, de coordonnés $(x + k, y + 2k, z - k)$. Déterminons k tel que ce point appartienne à P : cette condition s'écrit $x + k + y + 2k + z - k = 1$, soit $k = \dfrac{1-x-y-z}{2}$.

Nous en déduisons $\overrightarrow{MM_1} = k\vec{u} = -\overrightarrow{MM'}$ donc $\overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{M_1M}$.

Concluons : g est l'affinité de base P, de direction $\mathbb{R}\vec{u}$ et de rapport 2.

▶ **Objectif** : vos devez donner une équation paramétrique, puis une équation cartésienne du plan P contenant les points $A(1, 2, 3)$, $B(2, -1, 2)$ et $C(3, 0, 1)$.

Q3 • Méthode 1 : l'équation paramétrique s'obtient en introduisant les paramètres λ et μ : $\begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 - 2\lambda - 2\mu \\ z = 3 - \lambda - 2\mu \end{cases}$

En éliminant λ et μ, nous obtenons l'équation de plan demandée.

• Méthode 2 : $M(x, y, z)$ appartient à p ssi $m(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$, soit $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-2 & -2 & -2 \\ z-3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Le calcul du déterminant nous donne l'équation $x + z = 4$.