$\boxed{\text{Q1}}$ Le plan est muni d'un repère. Fixons $n \geqslant 1$. Pour $1 \leqslant p \leqslant n$ et $1 \leqslant q \leqslant n$, notons $A_{p,q}$ le point de coordonnées (p, q) dans ce repère, et l'on affecte ce point du coefficient $p+q$. Déterminez les coordonnées du barycentre de la famille de points pondérés ainsi définie.

$\boxed{\text{Q2}}$ Une droite $\mathcal{D}$ coupe les côtés (AB), (BC) et (CA) d'un triangle en P, Q, R. Prouvez que I, J, K définis par $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CR} + \overrightarrow{CQ}$ sont alignés.

$\boxed{\text{Q3}}$ Soient $\mathcal{D}$ une droite et A, B, C trois points. Déterminez $\{P \mid \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\ ,\ M \in \mathcal{D}\}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Soient A et B deux points du plan affine. Caractérisez la transformation qui, au point M, associe le barycentre de A, B et M affectés des coefficients respectifs 1, 1 et 2. (Bac E Orléans 1975 Exercice II)

$\boxed{\text{Q5}}$ h est une homothétie de centre O, de rapport $\lambda \neq 1$; t est une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul. Explicitez $h^{-1} \circ t \circ h$ et $t^{-1} \circ h \circ t$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Prouvez que, si l'application linéaire associée à une application affine f est une homothétie vectorielle de rapport $k \neq 1$, alors f elle-même est une homothétie affine de rapport k.

$\boxed{\text{Q7}}$ Soient A, B, C non alignés ; I, J, K les milieux respectifs de $[B, C]$, $[C, A]$ et $[A, B]$; O un point quelconque ; h l'homothétie de centre O et de rapport 2 ; $I' = h(I)$, $J' = h(J)$, $K' = h(K)$. Prouvez que les droites (AI'), (BJ') et (CK') sont concourantes.

$\boxed{\text{Q8}}$ Nous nous plaçons dans un plan affine, repéré par $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Notons A le point de coordonnées $(1, 2)$, B celui de coordonnées $(3, 4)$ et f l'application affine qui envoie A sur B, et dont l'application linéaire associée φ est involutive et vérifie $\varphi(\vec{\imath}) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$. (i) calculez $\varphi(\vec{\jmath})$. (ii) soient M de coordonnées (x, y) et $M' = f(M)$; explicitez les coordonnées (x', y') de M' en fonction de celles de M. (iii) f est-elle involutive ? f possède-t-elle des points invariants ? (Bac C Bordeaux septembre 1979 Exercice II)

$\boxed{\text{Q9}}$ Nous nous plaçons dans l'espace affine, repéré par $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Considérons la transformation f qui, au point M de coordonnées (x, y, z), associe le point M' de coordonnées (x', y', z') définies par :

$$\begin{cases} x' &= -y + z + 3 \\ y' &= -x + z + 3 \\ z' &= -x - y + 2z + 3 \end{cases}$$

(i) justifiez rapidement le fait que f est une application affine. (ii) montrez que f est une projection, dont on précisera les éléments géométriques. (iii) soit P le plan d'équation $x + y - 2z - 3 = 0$; quelle est la dimension de l'image par f de P ? Donnez un repère de cette image.

$\boxed{\text{Q10}}$ Considérons les droites $D(x - y + 2 = 0)$ et $D'(2x + 3y - 1 = 0)$. Déterminez l'expression analytique de la projection sur D selon la direction de D', puis de la projection sur D' selon la direction de D.

$\boxed{\text{Q11}}$ Donnez une équation d'une droite D parallèle à la droite $\Delta(2x = 3y = 6z)$ et rencontrant les droites $\Delta_1(x = 0, z = 4)$ et $\Delta_2(y = 0, z = -4)$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Donnez une équation de la projection de la droite $D(x+y+z = 1, x-2y-z = 0)$ sur le plan $P(x+3y+2z = 6)$, parallèlement à la direction de la droite $\Delta(6x = 2y = 3z)$.

Un mini-problème (Bac C, Pondichéry 1979)

► A, B et C sont trois points non alignés du plan affine. P' désigne le plan P privé de la droite (AB).

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit E l'ensemble des couples (a, b) de réels tels que $a + b + 1 \neq 0$; montrez que la transformation f qui à tout élément (a, b) de E associe le barycentre G de (A, a), (B, b) et $(C, 1)$ est une bijection de E sur P'.

► Définissons maintenant une transformation g de P' dans P' comme suit : soit $G \in P'$; notons a et b les réels tels que G soit le barycentre M de (A, a), (B, b) et $(C, 1)$; alors $g(M)$ est le point M' barycentre de (A, b), (B, a) et $(C, 1)$. Nous pouvons donner une définition plus formalisée : notons s l'involution de E qui associe au couple (a, b) de réels le couple (b, a) ; alors $g = f \circ s \circ f^{-1}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Déterminez les points de P' invariants par g.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez que la direction du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ ne dépend pas de M.

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrez que le milieu du segment MM' appartient à une droite fixe.

$\boxed{\text{Q5}}$ Donnez alors une description géométrique de g.