Q1 Le plan est muni d'un repère. Fixons $n \geqslant 1$. Pour $1 \leqslant p \leqslant n$ et $1 \leqslant q \leqslant n$, notons $A_{p,q}$ le point de coordonnées (p,q) dans ce repère, et l'on affecte ce point du coefficient $p+q$. Déterminez les coordonnées du barycentre de la famille de points pondérés ainsi définie.

Q2 Une droite $\mathcal{D}$ coupe les côtés (AB), (BC) et (CA) d'un triangle en P, Q, R. Prouvez que I, J, K définis par $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CR} + \overrightarrow{CQ}$ sont alignés.

Q3 Soient $\mathcal{D}$ une droite et A, B, C trois points. Déterminez $\{P \mid \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\ ,\ M \in \mathcal{D}\}$.

Q4 Soient A et B deux points du plan affine. Caractérisez la transformation qui, au point M, associe le barycentre de A, B et M affectés des coefficients respectifs 1, 1 et 2. (Bac E Orléans 1975 Exercice II)

Q5 h est une homothétie de centre O, de rapport $\lambda \neq 1$; t est une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul. Explicitez $h^{-1} \circ t \circ h$ et $t^{-1} \circ h \circ t$.

Q6 Prouvez que, si l'application linéaire associée à une application affine f est une homothétie vectorielle de rapport $k \neq 1$, alors f elle-même est une homothétie affine de rapport k.

Q7 Soient A, B, C non alignés ; I, J, K les milieux respectifs de $[B,C]$, $[C,A]$ et $[A,B]$; O un point quelconque ; h l'homothétie de centre O et de rapport 2 ; $I' = h(I)$, $J' = h(J)$, $K' = h(K)$. Prouvez que les droites (AI'), (BJ') et (CK') sont concourantes.

Q8 Nous nous plaçons dans un plan affine, repéré par $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Notons A le point de coordonnées $(1,2)$, B celui de coordonnées $(3,4)$ et f l'application affine qui envoie A sur B, et dont l'application linéaire associée φ est involutive et vérifie $\varphi(\vec{\imath}) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$. (i) calculez $\varphi(\vec{\jmath})$. (ii) soient M de coordonnées (x,y) et $M' = f(M)$; explicitez les coordonnées (x',y') de M' en fonction de celles de M. (iii) f est-elle involutive ? f possède-t-elle des points invariants ? (Bac C Bordeaux septembre 1979 Exercice II)

Q9 Nous nous plaçons dans l'espace affine, repéré par $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Considérons la transformation f qui, au point M de coordonnées (x,y,z), associe le point M' de coordonnées (x',y',z') définies par :

$$\begin{cases} x' &= -y+z+3 \\ y' &= -x+z+3 \\ z' &= -x-y+2z+3 \end{cases}$$

(i) justifiez rapidement le fait que f est une application affine. (ii) montrez que f est une projection, dont on précisera les éléments géométriques. (iii) soit P le plan d'équation $x+y-2z-3=0$; quelle est la dimension de l'image par f de P ? Donnez un repère de cette image.

Q10 Considérons les droites $D(x-y+2=0)$ et $D'(2x+3y-1=0)$. Déterminez l'expression analytique de la projection sur D selon la direction de D', puis de la projection sur D' selon la direction de D.

Q11 Donnez une équation d'une droite D parallèle à la droite $\Delta(2x = 3y = 6z)$ et rencontrant les droites $\Delta_1(x=0, z=4)$ et $\Delta_2(y=0, z=-4)$.

Q12 Donnez une équation de la projection de la droite $D(x+y+z=1, x-2y-z=0)$ sur le plan $P(x+3y+2z=6)$, parallèlement à la direction de la droite $\Delta(6x=2y=3z)$.

Un mini-problème (Bac C, Pondichéry 1979)

► A, B et C sont trois points non alignés du plan affine. P' désigne le plan P privé de la droite (AB).

Q1 Soit E l'ensemble des couples (a,b) de réels tels que $a+b+1 \neq 0$; montrez que la transformation f qui à tout élément (a,b) de E associe le barycentre G de (A,a), (B,b) et $(C,1)$ est une bijection de E sur P'.

► Définissons maintenant une transformation g de P' dans P' comme suit : soit $G \in P'$; notons a et b les réels tels que G soit le barycentre M de (A,a), (B,b) et $(C,1)$; alors $g(M)$ est le point M' barycentre de (A,b), (B,a) et $(C,1)$. Nous pouvons donner une définition plus formalisée : notons s l'involution de E qui associe au couple (a,b) de réels le couple (b,a) ; alors $g = f \circ s \circ f^{-1}$.

Q2 Déterminez les points de P' invariants par g.

Q3 Montrez que la direction du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ ne dépend pas de M.

Q4 Montrez que le milieu du segment MM' appartient à une droite fixe.

Q5 Donnez alors une description géométrique de g.