

## Énoncé 1

- $\mathbb{R}^3$  est muni de sa structure naturelle d'espace euclidien. Déterminez la nature de l'endomorphisme  $\varphi$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

## Corrigé 1

- Les vecteurs colonnes de  $A$  sont unitaires et deux à deux orthogonaux, donc  $A$  est une matrice orthogonale.
- $A_{1,1} = -\frac{2}{3}$  a pour cofacteur

$$\begin{vmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}$$

donc  $\det A = +1$  : ainsi,  $A$  est la matrice d'une rotation  $\varphi$ .

- Soit  $X = {}^t(x, y, z)$  ; résolvons l'équation  $AX = X$  :

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -5x - y + 2z = 0 \\ 2x - 5y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -9y + 3z = 0 \\ 9y - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 3y \end{cases}$$

Donc l'axe de  $\varphi$  est dirigé par le vecteur  $\vec{u} = {}^t(1, 1, 3)$ .

- Notons  $\theta$  l'angle de  $\varphi$  ;  $\operatorname{tr} A = -\frac{2}{3} = 1 + 2 \cos \theta$  donc  $\cos \theta = -\frac{5}{6}$ .
- Prenons un vecteur  $\vec{v}$  normal à  $\vec{u}$ , par exemple  $\vec{v} = {}^t(1, -1, 0)$  ; alors  $\varphi(\vec{v}) = {}^t(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$ . On calcule

$$m(\vec{u}, \vec{v}, \varphi(\vec{v})) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1/3 \\ 1 & -1 & 4/3 \\ 3 & 0 & -1/3 \end{vmatrix} = \frac{11}{3} > 0$$

donc  $\theta = \arccos(-\frac{5}{6}) \approx 146^\circ 26'$ .

## Énoncé 2

- Soient  $E$  un espace euclidien,  $\varphi$  un automorphisme de  $E$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Déterminer  $k \geq 0$  tel que  $\|u(x)\| \leq k \|\varphi(x)\|$  pour tout  $x \in E$ .

## Corrigé 2

- Soit  $y = \varphi(x)$  ; l'inégalité peut s'écrire  $\|u \circ \varphi^{-1}(y)\| \leq k \|y\|$  ; elle est certainement vérifiée lorsque  $y = 0$ . Sinon, notant  $z = \frac{y}{\|y\|}$ , on se ramène à chercher  $k \geq 0$  tel que, notant  $v = u \circ \varphi^{-1}$ ,  $\|v(z)\| \leq k$  pour tout vecteur  $z$  unitaire. Soit  $n$  la dimension de  $E$ . Fixons une b.o.n. de  $E$  ; notons  $A$  la matrice de  $v$ , et  $(z_i)_{1 \leq i \leq n}$  les coordonnées de  $z$ , dans cette base. Alors :

$$\|v(z)\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} ((Az)_i)^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{1 \leq j \leq n} A_{i,j} z_j \right)^2$$

L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ permet d'écrire :

$$\left( \sum_{1 \leq j \leq n} A_{i,j} z_j \right)^2 \leq \left( \sum_{1 \leq j \leq n} A_{i,j}^2 \right) \left( \sum_{1 \leq j \leq n} z_j^2 \right) = \left( \sum_{1 \leq j \leq n} A_{i,j}^2 \right)$$

puisque  $z$  est unitaire. Nous en déduisons

$$\|v(z)\|^2 \leq \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} A_{i,j}^2$$

donc le réel  $k = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} A_{i,j}^2}$  convient.

## Énoncé 3

- $E$  est un espace euclidien. Une fonction  $\varphi$  de  $E$  dans lui-même vérifie  $\varphi(0) = 0$ , et

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y\|$$

quels que soient les éléments  $x$  et  $y$  de  $E$ . Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme orthogonal. Est-ce encore vrai si l'on supprime la deuxième condition ?

## Corrigé 3

- Faisant  $y = 0$  dans la première condition, il vient  $\|\varphi(x)\| = \|x\|$  ; donc

$$\begin{aligned} \varphi(x) \cdot \varphi(y) &= \frac{1}{2} \left( \|\varphi(x)\|^2 + \|\varphi(y)\|^2 - \|\varphi(x) - \varphi(y)\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2 \right) \\ &= x \cdot y \end{aligned}$$

Ainsi  $\varphi$  conserve le produit scalaire. Notons  $n$  la dimension de  $E$ , et fixons une b.o.n.  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $E$ . La famille  $(\varphi(e_i))_{1 \leq i \leq n}$  est donc elle aussi une b.o.n. de  $E$ .

- Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $E$  :

$$\begin{aligned} (\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)) \cdot \varphi(e_i) &= \varphi(x+y) \cdot \varphi(e_i) - \varphi(x) \cdot \varphi(e_i) - \varphi(y) \cdot \varphi(e_i) \\ &= (x+y) \cdot e_i - x \cdot e_i - y \cdot e_i = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur  $\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)$ , orthogonal à tous les vecteurs d'une b.o.n. de  $E$ , est nul, soit  $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ . De même, avec  $\lambda$  réel :

$$(\varphi(\lambda x) - \lambda \varphi(x)) \cdot \varphi(e_i) = \varphi(\lambda x) \cdot \varphi(e_i) - \lambda \varphi(x) \cdot \varphi(e_i) = (\lambda x) \cdot e_i - \lambda x \cdot e_i = 0$$

donc, au même motif :  $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$ .

- $\varphi$  est donc linéaire ; comme elle conserve le produit scalaire, c'est un endomorphisme orthogonal de  $E$ .
- La deuxième condition est nécessaire : en effet, toute translation de  $E$  (fonction de la forme  $x \mapsto x + y$ , avec  $y$  fixé) vérifie la première condition, mais n'est évidemment linéaire que ssi le vecteur de translation est nul. Il est facile de voir que  $\varphi$  vérifie la première condition ssi  $\varphi$  est la composée d'un endomorphisme orthogonal et d'une translation.

## Énoncé 4

- L'espace  $\mathbb{R}^3$  est muni de sa structure euclidienne naturelle, et rapporté à la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ . Déterminer la matrice dans cette base de la projection orthogonale sur le plan d'équation  $x - 2y + z = 0$ .

## Corrigé 4

- Le vecteur  $u = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$  est unitaire et normal au plan ; soit  $v$  un vecteur quelconque,  $p(v)$  sa projection. Alors  $v - p(v)$  est colinéaire à  $u$  :  $v - p(v) = \lambda u$ , mais, en multipliant scalairement par  $u$ , il vient  $\lambda = v \cdot u$  ; donc  $p(v) = v - (v \cdot u)u$ . Il n'y a plus qu'à appliquer cette formule aux trois vecteurs de  $\mathcal{B}$  : il vient  $p(e_1) = (5/6, 1/3, -1/6)$ ,  $p(e_2) = (1/3, 1/3, 1/3)$  et  $p(e_3) = (-1/6, 1/3, 5/6)$ . La matrice demandée est donc :

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

La symétrie de cette matrice ne surprendra personne.

## Énoncé 5

- On munit  $\mathbb{R}_n[X]$  du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k b_k$$

où  $P = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k X^k$  et  $Q = \sum_{0 \leq k \leq n} b_k X^k$ . On note  $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(1)$ , et  $F = \ker \varphi$ . Expliciter la projection orthogonale de 1 sur  $F$ , puis calculer la distance de 1 à  $F$ .

•• En tant qu'hyperplan de  $\mathbb{R}_n[X]$ ,  $F$  est de dimension  $n$ ; la famille  $(X^k - 1)_{1 \leq k \leq n}$  en est une base (famille de  $n$  polynômes à degrés échelonnés de 1 à  $n$ ). Notons  $P = \sum_{1 \leq j \leq n} a_j X^j$  le projeté orthogonal cherché; on doit avoir, pour tout  $k \in [1, n]$ :  $\langle 1 - P, X^k - 1 \rangle = 0$ , soit

$$\left\langle 1 + \sum_{1 \leq j \leq n} a_j - \sum_{1 \leq j \leq n} a_j X^j, X^k - 1 \right\rangle = 0$$

ce qui donne  $-1 - \sum_{1 \leq j \leq n} a_j - a_k = 0$ , que nous écrivons  $\sum_{1 \leq j \leq n} a_j = -1 - a_k$ . Par sommation, il vient

$$n \sum_{1 \leq j \leq n} a_j = -n - \sum_{1 \leq k \leq n} a_k$$

donc  $\sum_{1 \leq j \leq n} a_j = -\frac{n}{n+1}$ . Nous en déduisons  $a_k = -1 + \frac{n}{n+1} = -\frac{1}{n+1}$ . Conclusion :

$$P = -\frac{1}{n+1} \sum_{1 \leq j \leq n} (X^j - 1) = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} \sum_{1 \leq j \leq n} X^j$$

La distance de 1 à  $F$  est la norme de  $1 - P$ ; or, dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ , on a  $1 - P = \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leq j \leq n} X^j$ ;

donc :

$$d(1, F) = \sqrt{\langle 1 - P, 1 - P \rangle} = \frac{1}{n+1} \sqrt{\sum_{0 \leq j \leq n} 1^2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

## Énoncé 6

•• L'exercice se passe dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ , muni de sa structure euclidienne naturelle, et orienté. On fixe un vecteur  $\vec{u}$  unitaire, et on demande d'étudier la fonction

$$f : \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \vec{x} + (\vec{x} \cdot \vec{u})\vec{u} + \sqrt{3}(\vec{x} \wedge \vec{u})$$

## Corrigé 6

•• Il est clair que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $\vec{v}$  un vecteur unitaire et normal à  $u$ , et  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ .  $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$ . On a  $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$ ,  $f(\vec{v}) = \vec{v} - \sqrt{3}\vec{w}$  et  $f(\vec{w}) = \vec{w} + \sqrt{3}\vec{v}$ . Donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ce qui montre que  $f$  est la composée (commutative) de l'homothétie de rapport 2, et de la rotation d'axe  $\vec{u}$  et d'angle  $-\frac{\pi}{3}$ .

## Énoncé 7

•• L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  est muni de sa structure euclidienne naturelle, et orienté. Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$ , et  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans  $\mathcal{B}$  est

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & -2 & c \end{pmatrix}$$

(i) on suppose que  $\varphi$  est un projecteur; sans calculer  $M^2$ , dire quelle est *nécessairement* la valeur de  $c$ .  
 (ii) déterminer  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  pour que  $\varphi$  soit un projecteur; est-il orthogonal? (iii) déterminer  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  pour que  $\varphi$  soit une rotation. (iv) peut-on prévoir les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$  sans longs calculs, si l'on sait que  $\varphi$  est une symétrie orthogonale? (v) déterminer  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  pour que  $\varphi$  soit une symétrie; est-elle orthogonale?

•• Si  $\varphi$  est un projecteur, sa trace est égale à son rang ; celui-ci ne peut manifestement être ni 0, ni 3, ni même 1 (observer l'indépendance des deux premiers vecteurs colonnes de  $M$ ) ; donc  $\text{tr } M = \text{tr } \varphi = 2$ , d'où  $c = 4$ .

• On trouve :

$$M^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 + 2a & 4 - 2a & a + 2b + ac \\ 4 + 2b & 5 - 2b & 2a + b + bc \\ -2 + 2c & 2 - 2c & 2a - 2b + c^2 \end{pmatrix}$$

La condition  $M^2 = M$  donne (par examen de la première colonne)  $a = -1$ ,  $b = 1$  et  $c = 4$ , et l'on vérifie que ces valeurs conviennent pour les deux autres colonnes. La matrice  $M$  obtenue n'est pas symétrique, donc  $\varphi$  n'est pas un projecteur orthogonal.

•  $\varphi$  est une rotation ssi elle transforme une b.o.n.d. en une autre b.o.n.d. or on constate que les deux premiers vecteurs colonnes de  $M$  sont unitaires, et orthogonaux l'un à l'autre ; les notant  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , il est nécessaire et suffisant que le troisième soit égal à  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ , soit  $a = -2$ ,  $b = 2$  et  $c = -1$ .

• Si  $\varphi$  est une symétrie orthogonale, sa matrice dans  $\mathcal{B}$  est symétrique (ce qui donne  $a = 2$  et  $b = -2$ ) ; et sa trace est égale à  $\dim \ker(u - Id) - \dim \ker(u + Id)$  ; les valeurs 3 et  $-3$  sont clairement exclues ; la valeur  $-1$  correspond à un demi-tour (que l'on aurait trouvé lors de la recherche d'une rotation) ; donc  $\text{tr } M = 1$  et  $c = 1$ .

• Avec le calcul effectué plus haut, l'égalité  $M^2 = I_3$  donne  $a = 2$ ,  $b = -2$  et  $c = 1$ . La matrice  $M$  est alors symétrique, ce qui montre que  $\varphi$  est une symétrie orthogonale.

•• Fixons deux vecteurs  $a$  et  $b$  d'un espace euclidien  $E$ . Déterminez le maximum et le minimum de la fonction  $f$  qui, à  $x \in E$  non nul, associe

$$f(x) = \frac{(x \cdot a)(x \cdot b)}{\|x\|^2}$$

•• Si  $a$  ou  $b$  est nul,  $f$  est nulle. Sinon, il suffit de résoudre le cas où  $a$  et  $b$  sont unitaires ; en effet, notant  $a' = \frac{a}{\|a\|}$  et  $b' = \frac{b}{\|b\|}$ , on a  $f(x) = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \frac{(x \cdot a')(x \cdot b')}{\|x\|^2}$ , si bien que  $f$  atteint son maximum (resp. son minimum) en même temps que  $x \mapsto \frac{(x \cdot a')(x \cdot b')}{\|x\|^2}$ . On remarque que  $f(x) = f(\lambda x)$  pour tout  $\lambda \neq 0$ , si bien qu'il suffit de déterminer le maximum et le minimum de  $f$  lorsque  $x$  décrit la sphère unité ; alors  $f(x) = (x \cdot a)(x \cdot b) \in [-1, +1]$ . Si  $a$  et  $b$  sont égaux, alors  $f(x) = (x \cdot a)^2 \in [0, 1]$  ; le maximum est 1, atteint pour  $x = a$  ; et le minimum est 0, atteint pour  $x$  orthogonal à  $a$  (si toutefois  $E$  est de dimension au moins 2). Si  $a$  et  $b$  sont opposés, alors  $f(x) = -(x \cdot a)^2 \in [-1, 0]$  ; le minimum est  $-1$ , atteint pour  $x = a$ , le maximum est 0, atteint pour  $x$  orthogonal à  $a$ . Enfin, supposons  $a$  et  $b$  indépendants ; soit  $y$  le projeté orthogonal de  $x$  sur le plan engendré par  $a$  et  $b$  ; il est clair que  $f(x) = f(y)$ , si bien qu'il suffit d'examiner le cas où  $E$  est un plan. Soit  $u$  unitaire, colinéaire à  $a + b$ , et  $v$  unitaire orthogonal à  $u$ . Orientons le plan, et notons  $\theta = (u, a)$ ,  $\varphi = (u, x)$ . On a  $(x \cdot a) = \cos(\varphi - \theta)$  et  $(x \cdot b) = \cos(\varphi + \theta)$ . Donc  $f(x) = \cos(\varphi - \theta) \cos(\varphi + \theta) = \frac{\cos(2\varphi) + \cos(2\theta)}{2} = g(\varphi)$ . Comme  $f(x) = f(-x)$ , il suffit d'étudier les variations de  $g$  dans l'intervalle  $[0, \pi]$ .

Or  $g'(\varphi) = -2 \sin(2\varphi)$ ,  $g$  décroît sur l'intervalle  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  de  $g(0) = \cos^2 \theta$  à  $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin^2 \theta$ , puis croît sur l'intervalle  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  jusqu'à  $g(\pi) = g(0)$ . Donc le maximum est  $\cos^2 \theta = (u \cdot a)^2$ , atteint pour  $x = u$  ; et le minimum est  $-\sin^2 \theta = -(v \cdot a)^2$ , atteint pour  $x = v$ . Notons que ces valeurs conviennent encore lorsque  $a = b$  (avec  $\theta = 0$ ) et lorsque  $a = -b$  (avec  $\theta = \pi/2$ ).