Q1 Déterminez une base orthonormale du s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, -1, 0)$ et $(0, 2, 3, 1)$.

Q2 $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne naturelle. Notons $\mathcal{B}$ sa base canonique, F le s.e.v. d'équation $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y-z-t=0 \end{cases}$ dans cette base, et p la projection orthogonale sur F. Déterminez la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$. Pour $u = (x, y, z, t)$, calculez $d(u, F) = \min_{v \in F} \|u - v\|$.

Q3 Munissons $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a_k b_k$ où $P = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} b_k X^k$. Notons $\varphi :\ P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(1)$, et $F = \ker(\varphi)$. Explicitez la projection orthogonale de 1 sur F, puis calculez la distance de 1 à $F : d(1, F) = \min_{x \in F} \|x - 1\|$. Source : Mines 1993.

Q4 Soient ψ une rotation de $\mathbb{R}^3$, et A sa matrice dans la base canonique. Il est clair que la matrice $\dfrac{A - A^T}{2}$ est antisymétrique ; notons-la $B = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$. Montrez que le vecteur $u = (p, q, r)$ dirige l'axe de ψ. Soit v normal à u ; montre que le produit mixte $m\big(u, v, \psi(v)\big)$ est strictement positif.

Q5 $\star$ n est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. Notons $f :\ u \in \mathbb{R}^3 \mapsto n \wedge (n \wedge u)$; Montrez que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$; déterminez son noyau et son image. Quelle est la nature de f ? Indication : utilisez une b.o.n.d. dont n est le premier vecteur.

Q6 S_n désigne le groupe des permutations de l'intervalle discret $[\![1,n]\!]$. Déterminez $\max_{s \in S_n} \sum_{k=1}^{n} k \cdot s(k)$, puis $\min_{s \in S_n} \sum_{k=1}^{n} k \cdot s(k)$.

Q7 Prouvez que la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ est dans $SO(3)$ ssi a, b et c sont les racines de $X^3 - X^2 + k$ avec $k \in [0, 4/27]$. Lorsque cette condition est satisfaite, précisez l'axe et l'angle de la rotation représentée par cette matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Q8 $\star$ Soient a, b et c trois réels ; notons M la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Déterminez tous les triplets (a, b, c) tels que M soit orthogonale. Pour chaque solution obtenue, donnez la nature et les éléments géométriques de l'endomoprhisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique.

Un mini-problème

► Soient E un espace euclidien et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Un endomorphisme f de E est *symétrique* s'il vérifie $f(x) \cdot y = x \cdot f(y)$ quels que soient les vecteur x et y de E ;

Q9 Donnez quelques exemples d'automorphismes symétriques, puis quelques exemples d'endomorphismes symétriques non bijectifs.

Q10 Montrez que, si f est symétrique, alors la matrice dans $\mathcal{B}$ de f est symétrique.

Q11 Réciproquement, soit f un endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est symétrique. Montrez que la matrice de f dans *n'importe quelle* base orthonormée est symétrique.

---

8 : quatre solutions : $\pm I_3$ et $a = \pm 1/3$, $b = c = -2a$;