Q1 Déterminez une base orthonormale du s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1,0,1,0)$, $(0,1,-1,0)$ et $(0,2,3,1)$.

Q2 $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne naturelle. Notons $\mathcal{B}$ sa base canonique, F le s.e.v. d'équation $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y-z-t=0 \end{cases}$ dans cette base, et p la projection orthogonale sur F. Déterminez la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$. Pour $u=(x,y,z,t)$, calculez $d(u,F)=\min\limits_{v\in F}\|u-v\|$.

Q3 Munissons $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P,Q\rangle = \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} a_k b_k$ où $P=\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} a_k X^k$ et $Q=\sum_{0\leqslant k\leqslant n} b_k X^k$. Notons $\varphi : P\in\mathbb{R}_n[X]\mapsto P(1)$, et $F=\ker(\varphi)$. Explicitez la projection orthogonale de 1 sur F, puis calculez la distance de 1 à F : $d(1,F)=\min\limits_{x\in F}\|x-1\|$. Source : Mines 1993.

Q4 Soient ψ une rotation de $\mathbb{R}^3$, et A sa matrice dans la base canonique. Il est clair que la matrice $\dfrac{A-A^T}{2}$ est antisymétrique ; notons-la $B=\begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$. Montrez que le vecteur $u=(p,q,r)$ dirige l'axe de ψ. Soit v normal à u ; montre que le produit mixte $m\big(u,v,\psi(v)\big)$ est strictement positif.

Q5 $\star$ n est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. Notons $f : u\in\mathbb{R}^3\mapsto n\wedge(n\wedge u)$; Montrez que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$; déterminez son noyau et son image. Quelle est la nature de f ? Indication : utilisez une b.o.n.d. dont n est le premier vecteur.

Q6 S_n désigne le groupe des permutations de l'intervalle discret $[\![1,n]\!]$. Déterminez $\max\limits_{s\in S_n}\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot s(k)$, puis $\min\limits_{s\in S_n}\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot s(k)$.

Q7 Prouvez que la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ est dans $SO(3)$ ssi a, b et c sont les racines de X^3-X^2+k avec $k\in[0,4/27]$. Lorsque cette condition est satisfaite, précisez l'axe et l'angle de la rotation représentée par cette matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Q8 $\star$ Soient a, b et c trois réels ; notons M la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Déterminez tous les triplets (a,b,c) tels que M soit orthogonale. Pour chaque solution obtenue, donnez la nature et les éléments géométriques de l'endomoprhisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique.

Un mini-problème

► Soient E un espace euclidien et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Un endomorphisme f de E est *symétrique* s'il vérifie $f(x)\cdot y = x\cdot f(y)$ quels que soient les vecteur x et y de E ;

Q9 Donnez quelques exemples d'automorphismes symétriques, puis quelques exemples d'endomorphismes symétriques non bijectifs.

Q10 Montrez que, si f est symétrique, alors la matrice dans $\mathcal{B}$ de f est symétrique.

Q11 Réciproquement, soit f un endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est symétrique. Montrez que la matrice de f dans *n'importe quelle* base orthonormée est symétrique.

8 : quatre solutions : $\pm I_3$ et $a=\pm 1/3$, $b=c=-2a$;