Q1 Que pouvez-vous dire de deux polynômes P et Q à coefficients réels, qui vérifient $\sum_{0\leqslant k\leqslant n} P(k)Q(k) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Q2 Soit f un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien E. Pour quelles valeurs de λ le noyau de $f - \lambda\,\mathbf{id}$ peut-il être de dimension au moins 1 ? Donnez des exemples.

Q3 x et y sont deux vecteurs d'un espace euclidien E de dimension $n \geqslant 2$. Montrez que si $\|x\| = \|y\|$, alors il existe une réflexion s telle que $y = s(x)$. Montrez que si $x \cdot y = \|y\|^2$, alors il existe un hyperplan H tel que y soit le projeté orthogonal de x sur H.

Q4 Soit E un espace euclidien ; le produit scalaire de x et y est noté $\langle x, y\rangle$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. À quelle condition nécessaire et suffisante la fonction $(x, y) \mapsto \langle f(x), f(y)\rangle$ est-elle un produit scalaire sur E ?

Q5 $\star$ p et q sont deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E. Notons $\mathbf{0}$ l'endomorphisme nul de E. Montrez que $p \circ q = \mathbf{0}$ ssi $q \circ p = \mathbf{0}$. Indication : commencez par montrer que, si deux s.e.v. A et B de E vérifient $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.

Q6 $\star$ Soit $A \in \mathcal{O}(3)$; notons $\mu(A) = \left|\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant 3}\sum_{1\leqslant j\leqslant 3} A_{i,j}\right)\right|$. Prouvez l'inégalité $\mu(A) \leqslant 9$. En utilisant le vecteur $X = (1, 1, 1)$, prouvez l'inégalité $\mu(A) \leqslant 3$. Ce dernier résultat peut-il être amélioré ?

Q7 Notons p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}$. Montrez que p est un projecteur orthogonal ; donnez ses éléments géométriques.

Q8 Soit $U = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un vecteur unitaire ; prouvez que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A_{i,j} = \delta_{i,j} - 2u_i \cdot u_j$ est orthogonale. Indication : simplifiez $(A \cdot A^T)_{i,j}$, ou bien exprimez A au moyen de I_n, U et U^T.

Q9 $\star\star$ E est un espace euclidien. f et g sont deux fonctions de E dans E qui vérifient $f(x) \cdot y = x \cdot g(y)$ quels que soient x et y. Montrez que f et g sont toutes deux linéaires.

Q10 $\star\star$ Soient E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs unitaires de E. On suppose $\|x\|^2 = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \langle x, e_i\rangle^2$ quel que soit $x \in E$. Montrez que $\mathcal{B}$ est une b.o.n. de E.

Un mini-problème

► Pour $n \geqslant 1$, notons $S_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} k\sqrt{k}$.

Q1 Donnez une majoration « grossière » de S_n.

Q2 Établissez la majoration $S_n \leqslant \dfrac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$. Indication : considérez les vecteurs $\vec{u} = (1, 2, \ldots, n)$ et $\vec{v} = \left(\sqrt{1}, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{n}\right)$,

Q3 Quelle autre majoration de S_n pouvait-on obtenir avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz ?

Q4 Mettez en évidence une somme de Riemann pour obtenir un équivalent simple de S_n lorsque $n \to \infty$.

Q5 En encadrant par deux intégrales, retrouvez le résultat de la question précédente.

Q6 Comparez les qualités des diverses majorations que vous avez établies.

6 : se placer dans $\mathbb{R}^9$, avec le vecteur $(1, \ldots, 1)$; puis dans $\mathbb{R}^3$, observer $AX \cdot X$; ce dernier résultat est optimal ; **7** : $A^T = A = A^2$; p est la projection orthogonale sur le plan d'équation $3x - y - z = 0$;