

- Q1** Que pouvez-vous dire de deux polynômes  $P$  et  $Q$  à coefficients réels, qui vérifient  $\sum_{0 \leq k \leq n} P(k)Q(k) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ?
- Q2** Soit  $f$  un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien  $E$ . Pour quelles valeurs de  $\lambda$  le noyau de  $f - \lambda \text{id}$  peut-il être de dimension au moins 1 ? Donnez des exemples.
- Q3**  $x$  et  $y$  sont deux vecteurs d'un espace euclidien  $E$  de dimension  $n \geq 2$ . Montrez que si  $\|x\| = \|y\|$ , alors il existe une réflexion  $s$  telle que  $y = s(x)$ . Montrez que si  $x \cdot y = \|y\|^2$ , alors il existe un hyperplan  $H$  tel que  $y$  soit le projeté orthogonal de  $x$  sur  $H$ .
- Q4** Soit  $E$  un espace euclidien ; le produit scalaire de  $x$  et  $y$  est noté  $\langle x, y \rangle$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . À quelle condition nécessaire et suffisante la fonction  $(x, y) \mapsto \langle f(x), f(y) \rangle$  est-elle un produit scalaire sur  $E$  ?
- Q5**  $\star$   $p$  et  $q$  sont deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien  $E$ . Notons  $\mathbf{0}$  l'endomorphisme nul de  $E$ . Montrez que  $p \circ q = \mathbf{0}$  ssi  $q \circ p = \mathbf{0}$ . Indication : commencez par montrer que, si deux s.e.v.  $A$  et  $B$  de  $E$  vérifient  $A \subset B$ , alors  $B^\perp \subset A^\perp$ .
- Q6**  $\star$  Soit  $A \in \mathcal{O}(3)$  ; notons  $\mu(A) = \left| \left( \sum_{1 \leq i \leq 3} \sum_{1 \leq j \leq 3} A_{i,j} \right) \right|$ . Prouvez l'inégalité  $\mu(A) \leq 9$ . En utilisant le vecteur  $X = (1, 1, 1)$ , prouvez l'inégalité  $\mu(A) \leq 3$ . Ce dernier résultat peut-il être amélioré ?
- Q7** Notons  $p$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est  $A = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}$ . Montrez que  $p$  est un projecteur orthogonal ; donnez ses éléments géométriques.
- Q8** Soit  $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$  un vecteur unitaire ; prouvez que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par  $A_{i,j} = \delta_{i,j} - 2u_i \cdot u_j$  est orthogonale. Indication : simplifiez  $(A \cdot A^T)_{i,j}$ , ou bien exprimez  $A$  au moyen de  $I_n$ ,  $U$  et  $U^T$ .
- Q9**  $\star\star$   $E$  est un espace euclidien.  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de  $E$  dans  $E$  qui vérifient  $f(x) \cdot y = x \cdot g(y)$  quels que soient  $x$  et  $y$ . Montrez que  $f$  et  $g$  sont toutes deux linéaires.
- Q10**  $\star\star$  Soient  $E$  un espace euclidien et  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de vecteurs unitaires de  $E$ . On suppose  $\|x\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} \langle x, e_i \rangle^2$  quel que soit  $x \in E$ . Montrez que  $\mathcal{B}$  est une b.o.n. de  $E$ .

### Un mini-problème

► Pour  $n \geq 1$ , notons  $S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} k\sqrt{k}$ .

- Q1** Donnez une majoration « grossière » de  $S_n$ .
- Q2** Établissez la majoration  $S_n \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$ . Indication : considérez les vecteurs  $\vec{u} = (1, 2, \dots, n)$  et  $\vec{v} = (\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n})$ ,
- Q3** Quelle autre majoration de  $S_n$  pouvait-on obtenir avec l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ ?
- Q4** Mettez en évidence une somme de RIEMANN pour obtenir un équivalent simple de  $S_n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .
- Q5** En encadrant par deux intégrales, retrouvez le résultat de la question précédente.
- Q6** Comparez les qualités des diverses majorations que vous avez établies.

---

**6** : se placer dans  $\mathbb{R}^9$ , avec le vecteur  $(1, \dots, 1)$  ; puis dans  $\mathbb{R}^3$ , observer  $AX \cdot X$  ; ce dernier résultat est optimal ; **7** :  $A^T = A = A^2$  ;  $p$  est la projection orthogonale sur le plan d'équation  $3x - y - z = 0$  ;