Questions faciles

Q1 Définissons la fonction $\psi:\ (u,v)\mapsto u_1v_1-u_1v_2-u_2v_1+3u_2v_2$, où $u=(u_1,u_2)$ et $v=(v_1,v_2)$. Montrez que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Q2 Définissons la fonction $\varphi:\ (u,v)\mapsto (u_1-2u_2)(v_1-2v_2)+u_2v_2+(u_2+u_3)(v_2+v_3)$, où $u=(u_1,u_2,u_3)$ et $v=(v_1,v_2,v_3)$. Montrez que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Q3 Montrez que $\varphi:\ (P,Q)\mapsto P(0)Q(0)+\displaystyle\int_{-1}^{+1}P'(t)Q'(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Q4 L'exercice se passe dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}_2[X]$. Soient $P=a_0+a_1X+a_2X^2$ et $Q=b_0+b_1X+b_2X^2$. Définissons $\varphi(P,Q)=(a_0+a_1)b_0+(a_0+3a_1)b_1+3a_2b_2$. Montrez que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Q5 Soit $A\in O(n)$. Prouvezl'inégalité $\displaystyle\Bigl|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\Bigr|\leqslant n$. Donnez des exemples où l'on a l'égalité.

Inégalités

Q6 Soit (E,φ) un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire. Donnez une autre preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en développant $\Bigl\|\|y\|^2x-(x\cdot y)y\Bigr\|^2$.

Q7 Soit (E,φ) un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire. Soient x et y deux vecteurs quelconques de E. Prouvez l'inégalité $1+\|x+y\|^2<2\bigl(1+\|x\|^2\bigr)\bigl(1+\|y\|^2\bigr)$.

Q8 Trois réels x, y et z vérifient $x^2+y^2+z^2=1$. Prouvez l'inégalité $(x+2y+3z)^2\leqslant 14$.

Q9 Trois réels x, y et z vérifient $x^2+2y^2+3z^2\leqslant 1$. Montrer que $(x+y+z)^2\leqslant\frac{11}{6}$.

Q10 Soient $x_1,\ldots,x_n$ des réels. Prouvez l'inégalité $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n}x_k\leqslant\sqrt{n}\times\sqrt{\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(x_k)^2}$.

Q11 Soit $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de réels ; donnez *trois* preuves différentes de l'inégalité $\displaystyle\Bigl(\sum_{i=1}^{n}a_i\Bigr)^2\leqslant n\sum_{i=1}^{n}\Bigl(a_i\Bigr)^2$.

Q12 Soient $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ deux familles de réels et $(c_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille de réels positifs ou nuls. Prouvez l'inégalité $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n}a_kb_kc_k\leqslant\sqrt{\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(a_k)^2c_k}\times\sqrt{\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(b_k)^2c_k}$.

Q13 Les réels $x_1,\ldots,x_n$ sont strictement positifs et leur somme est égale à 1. Prouvez l'inégalité $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{x_i}\geqslant n^2$. Dans quel(s) cas a-t-on l'égalité ?

Questions diverses

Q14 Soient $n\in\mathbb{N}$ et $P\in\mathbb{R}_n[X]$. Montrez que, si $\displaystyle\int_0^1 t^kP(t)\,dt=0$ quel que soit $k\in[\![0,n]\!]$, alors $P=0$. Le choix des bornes 0 et 1 a-t-il une importance ?

Q15 Le théorème de Pythagore énonce une CNS pour que deux vecteurs soient orthogonaux. Sa généralisation à une famille de $n\geqslant 3$ vecteurs énonce une CS : si les vecteurs $u_1,\ldots,u_n$ sont deux à deux orthogonaux, alors $\displaystyle\Bigl\|\sum_{1\leqslant i\leqslant n}u_i\Bigr\|^2=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\|u_i\|^2$. Montrez que l'on n'a pas la CS, en exhibant trois vecteurs u, v et w d'un espace euclidien E, vérifiant $\|u+v+w\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2+\|w\|^2$ et $u\cdot v\neq 0$, $v\cdot w\neq 0$ et $w\cdot u\neq 0$.

Q16 Combien de matrices orthogonales ont tous leurs coefficients dans $\mathbb{Z}$?

Q17 Quelles sont les matrices orthogonales triangulaires supérieures ?

Q18 Munissons $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par $P\cdot Q=\displaystyle\int_{[0,1]}PQ$. Soit $P_n=\sqrt{n}(X-1)^n$; calculez $\|P_n\|^2$. Soit $A\in\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P\cdot A=P(0)$ pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$; prouvez l'inégalité $\sqrt{2n}\leqslant\|A\|$. Que concluez-vous ?

---

9 : $(x,y\sqrt{2},z\sqrt{3})\cdot(1,1/\sqrt{2},1/\sqrt{3})$; **11** : réc, CVX, ICS ; **13** : utiliser $(\sqrt{x_i})$ et $(1/\sqrt{x_i})$; **15** : $(1,0),(1,i\sqrt{3}),(1,-i\sqrt{3})$; **16** : $2^nn!$; **17** : $\mathrm{diag}(\pm1,\ldots,\pm1)$;
