

Questions faciles

- Q1** Définissons la fonction $\psi : (u, v) \mapsto u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 3u_2v_2$, où $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$. Montrez que φ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 .
- Q2** Définissons la fonction $\varphi : (u, v) \mapsto (u_1 - 2u_2)(v_1 - 2v_2) + u_2v_2 + (u_2 + u_3)(v_2 + v_3)$, où $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$. Montrez que φ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 .
- Q3** Montrez que $\varphi : (P, Q) \mapsto P(0)Q(0) + \int_{-1}^{+1} P'(t)Q'(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- Q4** L'exercice se passe dans le \mathbb{R} -e.v. $\mathbb{R}_2[X]$. Soient $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$. Définissons $\varphi(P, Q) = (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2$. Montrez que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
- Q5** Soit $A \in O(n)$. Prouvez l'inégalité $\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \right| \leq n$. Donnez des exemples où l'on a l'égalité.

Inégalités

- Q6** Soit (E, φ) un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire. Donnez une autre preuve de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, en développant $\| \|y\|^2x - (x \cdot y)y \|^2$.
- Q7** Soit (E, φ) un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire. Soient x et y deux vecteurs quelconques de E . Prouvez l'inégalité $1 + \|x + y\|^2 < 2(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2)$.
- Q8** Trois réels x, y et z vérifient $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Prouvez l'inégalité $(x + 2y + 3z)^2 \leq 14$.
- Q9** Trois réels x, y et z vérifient $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1$. Montrer que $(x + y + z)^2 \leq \frac{11}{6}$.
- Q10** Soient x_1, \dots, x_n des réels. Prouvez l'inégalité $\sum_{1 \leq k \leq n} x_k \leq \sqrt{n} \times \sqrt{\sum_{1 \leq k \leq n} (x_k)^2}$.
- Q11** Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de réels ; donnez *trois* preuves différentes de l'inégalité $\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n (a_i)^2$.
- Q12** Soient $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ deux familles de réels et $(c_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille de réels positifs ou nuls. Prouvez l'inégalité $\sum_{1 \leq k \leq n} a_k b_k c_k \leq \sqrt{\sum_{1 \leq k \leq n} (a_k)^2 c_k} \times \sqrt{\sum_{1 \leq k \leq n} (b_k)^2 c_k}$.
- Q13** Les réels x_1, \dots, x_n sont strictement positifs et leur somme est égale à 1. Prouvez l'inégalité $\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$. Dans quel(s) cas a-t-on l'égalité ?

Questions diverses

- Q14** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrez que, si $\int_0^1 t^k P(t) dt = 0$ quel que soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, alors $P = 0$. Le choix des bornes 0 et 1 a-t-il une importance ?
- Q15** Le théorème de PYTHAGORE énonce une CNS pour que deux vecteurs soient orthogonaux. Sa généralisation à une famille de $n \geq 3$ vecteurs énonce une CS : si les vecteurs u_1, \dots, u_n sont deux à deux orthogonaux, alors $\left\| \sum_{1 \leq i \leq n} u_i \right\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} \|u_i\|^2$. Montrez que l'on n'a pas la CS, en exhibant trois vecteurs u, v et w d'un espace euclidien E , vérifiant $\|u + v + w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$ et $u \cdot v \neq 0, v \cdot w \neq 0$ et $w \cdot u \neq 0$.
- Q16** Combien de matrices orthogonales ont tous leurs coefficients dans \mathbb{Z} ?
- Q17** Quelles sont les matrices orthogonales triangulaires supérieures ?
- Q18** Munissons $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par $P \cdot Q = \int_{[0,1]} PQ$. Soit $P_n = \sqrt{n}(X-1)^n$; calculez $\|P_n\|^2$. Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P \cdot A = P(0)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$; prouvez l'inégalité $\sqrt{2n} \leq \|A\|$. Que concluez-vous ?

9 : $(x, y\sqrt{2}, z\sqrt{3}) \cdot (1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3})$; **11** : réc, CVX, ICS ; **13** : utiliser $(\sqrt{x_i})$ et $(1/\sqrt{x_i})$; **15** : $(1, 0), (1, i\sqrt{3}), (1, -i\sqrt{3})$; **16** : $2^n n!$; **17** : $\text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$;