Sup PCSI 2 — Exercices : coniques (2)

$\boxed{\text{Q1}}$ Donnez la forme réduite de l'équation de la conique $4x^2-9y^2-8x+36y+4=0$. Source : Condamine 22-3.

$\boxed{\text{Q2}}$ Donnez la forme réduite de l'équation de la conique $4x^2-9y^2-8x-36y-41=0$. Source : Condamine 22-3.

$\boxed{\text{Q3}}$ La courbe Γ est définie par l'équation $z^3-3z^2+4z=\overline{z}^3-3\overline{z}^2+4\overline{z}$. Déterminez la nature et les éléments géométriques de cette courbe. Source : Condamine 22-6.

$\boxed{\text{Q4}}$ Une courbe Γ est définie par le paramétrage $x=2\cos(t)$, $y=1+3\sin(t)$ Formez l'équation cartésienne de Γ. Source : Condamine 22-11.

$\boxed{\text{Q5}}$ Donnez la nature et les éléments géométriques de la courbe C définie par le paramétrage $x=e^t+e^{-t}-1$, $y=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$. Source : Condamine 22-12.

$\boxed{\text{Q6}}$ Déterminez l'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(23,0)$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équations $x+y+2z=1$ $2x-y+3z=2$. Source : Ellipses.

$\boxed{\text{Q7}}$ Déterminez λ tel que l'intersection des droites D d'équations $x+\lambda z=5$ et $y-z=1$ et D' d'équations $y+2z=0$ et $-x+z=3$ ne soit pas vide. Préciser le(s) points d'intersection. Source : Ellipses.

$\boxed{\text{Q8}}$ On se place dans l'espace euclidien. La réflexion affine s échange les points $A(1,1,1)$ et $B(3,-1,-1)$. Donnez l'expression analytique de s et sa matrice. Source : Nathan.
Solution :
s est la réflexion de base le plan médiateur du segment AB
$M\in P \iff AM=BM \iff \dots \iff x-y-z=2$
Notons H est le projeté orthogonal de M sr P
$\vec{n}=(1,-1,-1)$ est normal à P
on détermine λ tel qe $M+\lambda\vec{n}$ appartenne à P
il vent $\lambda=\dfrac{2(-x+y+z+2)}{3}$
$\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MH}$
$x'=(x+2y+2z+4)/3$, $y'=(2x+y-2z-4)/3$, $z'=(2x-2y+z-4)/3$

1 : hyperbole ; axe focal Oy ; centre $(1,2)$; $a=2$; $b=3$; $c=\sqrt{5}$; $e=\sqrt{5}/2$; **2** : hyperbole ; axe focal $y=-2$; centre $(1,-2)$; $a=3/2$; $b=1$; $c=\sqrt{13}/2$; $e=\sqrt{13}/3$; **3** : hyperbole ; axe focal $x=1$; $a=1$; $b=1/\sqrt{3}$; $c=2/\sqrt{3}$; $e=2/\sqrt{3}$; ; **4** : ellipse ; centre $(0,1)$; axe focal $y=1$; $a=3$; $b=1$; $c=2\sqrt{2}$; $e=2\sqrt{2}/3$; **5** : hyperbole ; centre (-10) ; axe focal $x=-1$; $a=2$; $b=1$; $s=\sqrt{5}$; $e=\sqrt{5}/2$; **6** : $\vec{v}=(5,-1,3)$ dirige $\mathcal{D}$; $A=(1,0,0)\in\mathcal{D}$; $S:\ x^2-4x+y^2-6y+z^2=7$; $t=\frac{\pm\sqrt{3214}}{35}$; **7** : $\lambda=-13$;